Fridmanovi modeli, opservabilne veličine

08.05.2015.

FRW metrika vs. Švarcšildova metrika

- Masa *M* u koordinatnom početku generiše Švarcšildovu metriku:

$$ds^2 = -c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2GM}{c^2 r}} + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right)$$

- što nije definisano za

$$r = 0 \quad \text{i} \quad r = r_g \equiv \frac{2GM}{c^2}$$

- FRW metrika:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right)$$

- Jedini nenulti članovi su dijagonalni:

$$g_{00} = -1 \qquad g_{11} = \frac{a^2}{1-kr^2} \qquad g_{22} = a^2 r^2 \qquad g_{33} = a^2 r^2 \sin^2\theta$$

- pošto je

$$g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\beta$$

- kontravarijantne komponente su:

$$g^{00} = -1 \qquad g^{11} = \frac{1-kr^2}{a^2} \qquad g^{22} = \frac{1}{a^2 r^2} \qquad g^{33} = \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2\theta}$$

- Koren iz negativne determinante metričkog tenzora je:

$$\sqrt{-g} = \frac{a^3 r^2 \sin\theta}{\sqrt{1-kr^2}}$$

- Dalji postupak uključuje računanje Kristofelovih simbola...

- Opšta formula za Kristofelove simbole je:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right)$$

- Svi simboli sa različitim indeksima su jednaki 0. Npr.:

$$\Gamma^{1}_{23} = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^{3}} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^{1}} \right) = \frac{1}{2} g^{11} (0 + 0 - 0) = 0$$

- Među nenultim Kristofelovim simbolima imamo npr.:

$$\Gamma^{1}_{11} = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^{1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - kr^{2}}{a^{2}} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{a^{2}}{1 - kr^{2}} \right) = \frac{kr}{1 - kr^{2}}$$

- Itd. itd. Računanje Kristofelovih simbola „rukom“ je teško!
- Ajnštajn 1917. pokazuje da na kraju dobijamo dve netrivijalne jednačine:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^{2} + kc^{2}}{a^{2}} = \frac{8\pi G}{c^{2}} T^{1}_{1} = \frac{8\pi G}{c^{2}} T^{2}_{2} = \frac{8\pi G}{c^{2}} T^{3}_{3}$$

$$\frac{\dot{a}^{2} + kc^{2}}{a^{2}} = \frac{8\pi G}{3c^{2}} T^{0}_{0}$$

Sledeći korak: komponente $T_{\mu\nu}$

- Podsetimo se:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}$$

- Ako zanemarimo sopstvena kretanja (= galaksije u homogenom stanju mirovanja u odnosu na celinu fluida = CMB referentni sistem), 4-brzina je jednostavno:

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0)$$

- Dakle, biće

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = p \qquad T_0^0 = -\rho c^2$$

- U aproksimaciji prašine, *p* = 0, pa se stvari dalje uprošćavaju. Ali pre toga...

Ključni rezultat: Fridmanove jednačine

- Ključne dinamičke jednačine za faktor skaliranja:

$$2\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}^2+kc^2}{a^2}=\frac{8\pi G}{c^2}p$$

$$\frac{\dot{a}^2+kc^2}{a^2}=-\frac{8\pi G}{3c^2}\rho c^2=-\frac{8\pi G}{3}\rho$$

- *k* ima tri vrednosti: -1, 0, 1. Uz malo manipulacije dobija se:

$$\frac{d}{da}\left(\rho c^2 a^3\right)+3pa^2=0$$

- Odavde ima više puteva, u zavisnosti od jednačine stanja!

Da ponovimo...

- Različite materijalne komponente i njihove različite **jednačine stanja** (karakteristične jednačine).
- U opštem slučaju, jednačina stanja je

$$P = f(\rho)$$

- ...uz određeni broj parametara (npr. temperatura).
- U realnom svemiru imamo
  - prašinu ($P = 0$)
  - idealni gas ($P \propto \rho$)
  - zračenje ($P = 1/3\ \rho c^2$)
  - vakuum ($P = -\rho c^2$)

- U kasnijim epohama, u kojima svemirom **dominira materija** i pritisak je zanemariv, p = 0, dobijamo:

$$\frac{d}{da}\left(\rho c^2 a^3\right)+3pa^2=0 \quad \rightarrow \quad \rho=\rho_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}$$

- Ovo nam pokazuje kako gustina materije opada sa širenjem svemira! (u **fizičkoj** zapremini, ne **usputnoj** zapremini)
- Međutim, za zračenje imamo jednačinu stanja

$$p=\frac{1}{3}\rho c^2$$

- za šta dobijamo:

$$\rho=\rho_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4}$$

Ovo se lako objašnjava crvenim pomakom

- Gustina zračenja opada sa 3 stepena faktora skaliranja zbog širenja prostora – i dodatni 1 stepen zbog **kosmološkog crvenog pomaka**.
- Ako se crveni pomak definiše standardno:

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{lab}}{\lambda_{lab}}$$

- onda važi

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)}$$

- što objašnjava zašto je crveni pomak baš crven – zato što se svemir širi!

Vreme

za

pauzu!

Epohe u istoriji svemira

- **Epoha kvantne kosmologije** (?)
- **Kosmološka inflacija** (10^{-36} – 10^{-32} s)
- **Period dominacije zračenja** (10^{-32} s – 400.000 god)
- **Period dominacije materije** (400.000 god – 10×10^{9} god)
- **Period dominacije vakuuma** (10×10^{9} god – danas... i još jako dugo!)

U periodu dominacije zračenja…

- Odigrali su se i sledeći ključni procesi:
  - bariogeneza
  - nastanak tamne materije
  - primordijalna nukleosinteza
  - početak formiranja strukture
- Period dominacije zračenja okončan je razdvajanjem materije i zračenja (*decoupling*) tokom **rekombinacije.**

Hablov parameter

- I u periodu dominacije zračenja i u periodu dominacije materije, univerzum se širi **usporeno**.
- Stopa širenja:

$$H(t) \equiv \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \frac{\dot{a}}{a}$$

- što je očigledno u opštem slučaju zavisno od vremena!
- U današnjoj epohi, ovo se najčešće naziva „Hablovom konstantom“ i piše kao

$$H_0 = 100\, h\, \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$$

- Uprkos dugačkoj kontroverzi, današnja posmatranja konvergiraju ka vrednosti:

$$h = 0,69 \pm 0,02$$

Parametar usporenja

- Informacija sadržana u **drugom izvodu** faktora skaliranja izražava se kroz **parametar usporenja** q_0:

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}(t_0)^2}$$

- Kada je q_0 pozitivno, širenje svemira se usporava, kada je q_0 negativno, ono se ubrzava.
- Dugo vremena je najpopularnija vrednost bila $q_0 = 0,5$, mada se ispostavlja da je uistinu $q_0 < 0$!
- Predmet tzv. **neoklasičnih kosmoloških testova**.
- Tejlorov razvoj crvenog pomaka:

$$z = (t_0 - t)H_0 + (t_0 - t)^2 \left(\frac{1}{2} q_0 + 1 \right) H_0^2 + \ldots$$

Ovako postaje jasno zašto se crveni pomak koristi kao časovnik!

- Npr. kažemo da se rekombinacija odigrala na t = 400.000 god **ILI** na z = 1100.

Ali se isto tako koristi i za merenje udaljenosti:

$$z = \frac{H_0 l}{c} + \frac{1}{2}\left(1 + q_0\right)\frac{H_0^2 l^2}{c^2} + O\left(H_0^3 l^3\right)$$

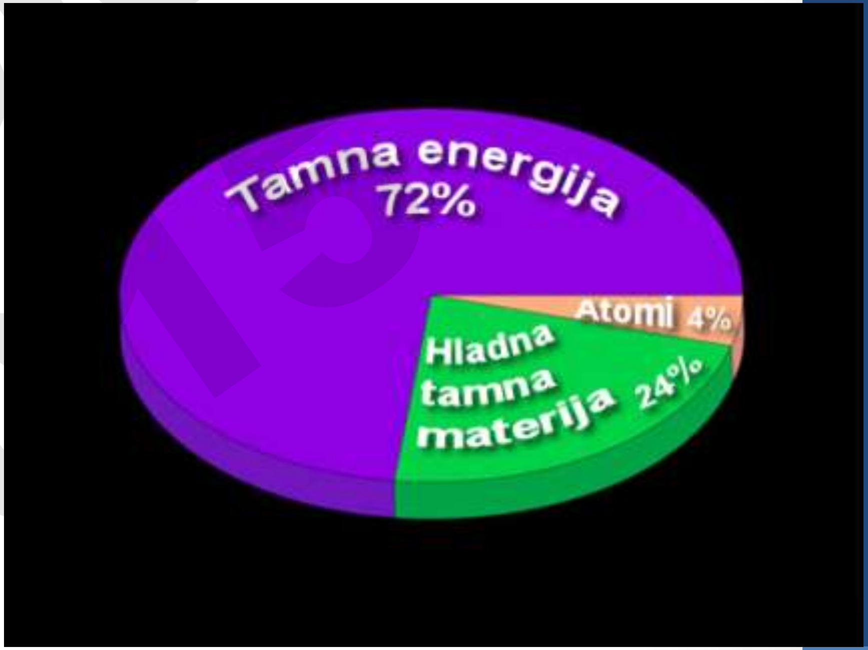
Potrebna nam je i mera gustine svemira

- Kritična gustina = gustina **ravnog** svemira koji prestaje da se širi

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

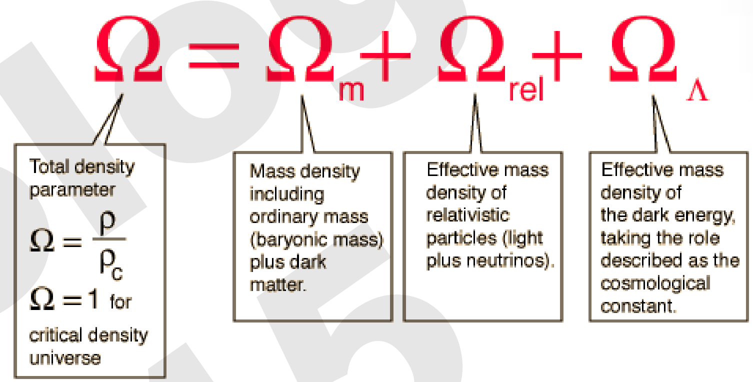
- Numerički: $\rho \sim 10^{-29}$ g cm^{-3}.
- Može se lako izvesti u njutnovskoj slici!
- Ako imamo konstituent *x* , njegova **kosmološka gustina** (ili **kosmološka frakcija gustine**) je:

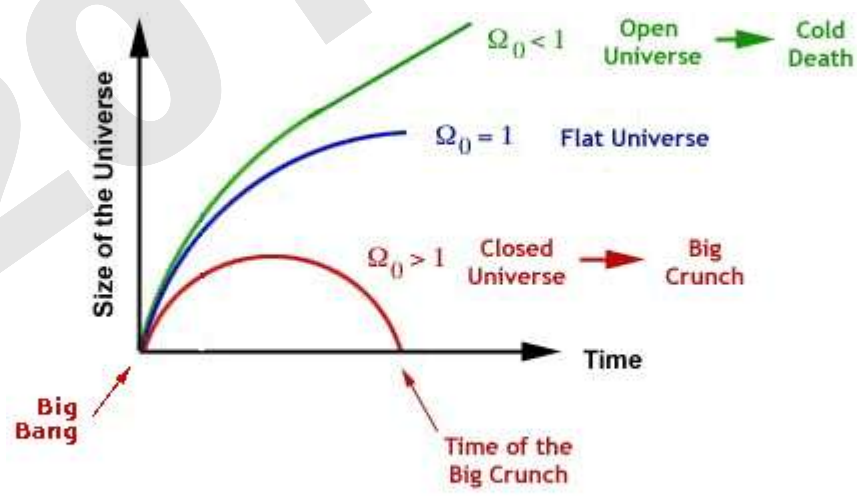
$$\Omega_x \equiv \frac{\rho_x}{\rho_{\text{crit}}}$$

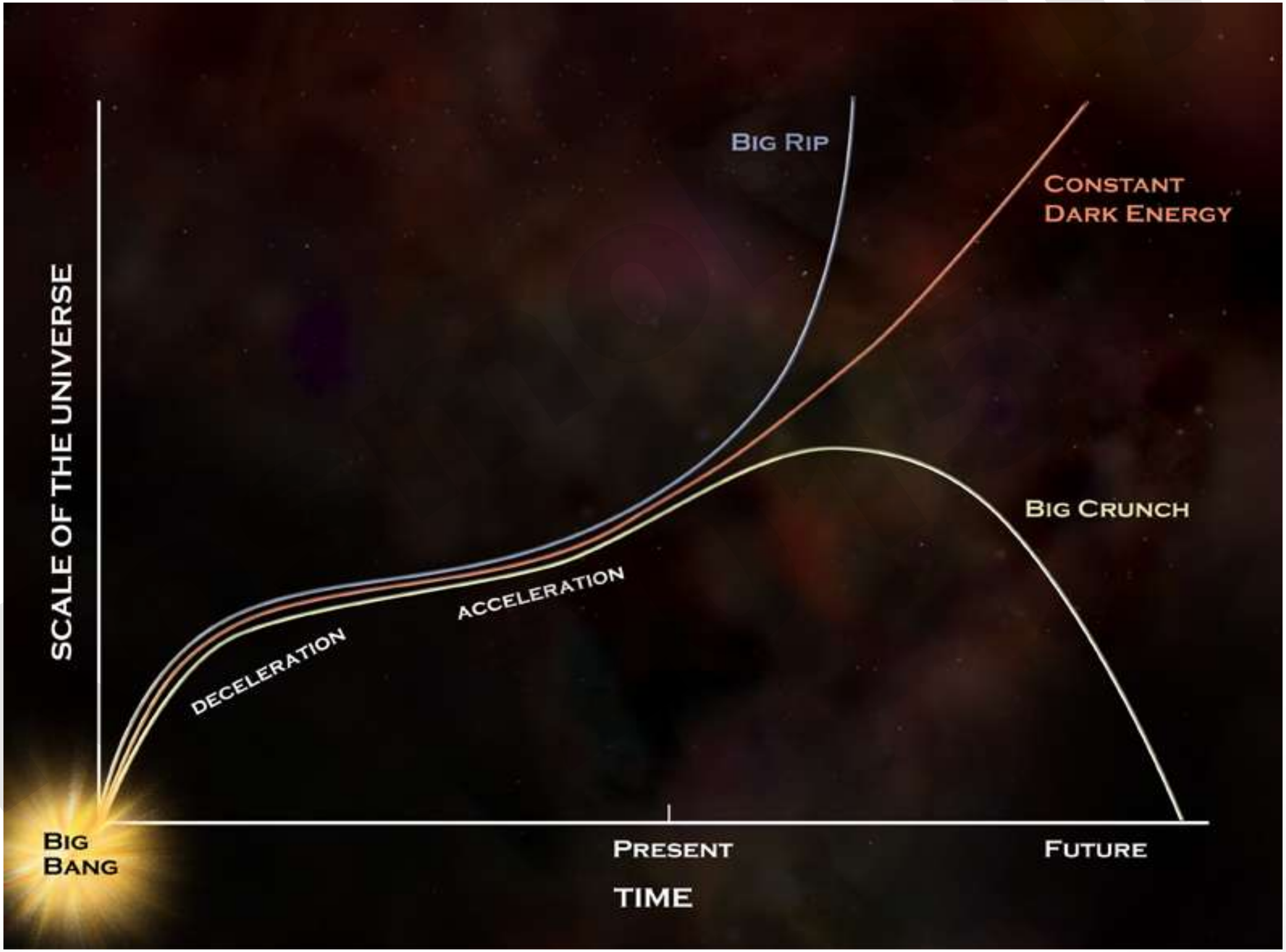


Kosmološka gustina

- Gustine raznih konstituenata su aditivne!
- U svemiru bez kosmološke konstante, kosmološka gustina bi bila determinanta budućnosti prostorvremena.
- Sa kosmološkom konstantom, situacija je malo kompleksnija...
- Određivanje Ω za razne komponente svemira je ključni zadatak posmatračke kosmologije






BIG RIP
CONSTANT
DARK ENERGY
BIG CRUNCH
SCALE OF THE UNIVERSE
ACCELERATION
DECELERATION
BIG
BANG
PRESENT
FUTURE
TIME