Rani svemir i Bolcmanova kinetička teorija

31. 07. 2015.

Da se podsetimo...

- U najopštijem slučaju imamo Fridmanovu jednačinu u obliku:

$$\left[\frac{H(a)}{H_0}\right]^2 = \Omega_\gamma \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_m \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_k \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_\lambda$$

- Za jako malo *a* zračenje dominira, a to znači

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3}\rho_\gamma \xrightarrow[\text{integracijom}]{\text{analitičkom}} \frac{32\pi G}{3}\rho_\gamma t^2 = 1$$

- pošto znamo da važi $\rho_\gamma \propto T^4$ dobijamo $T \propto t^{-\frac{1}{2}}$

- Grubo govoreći, u t = 1s, **T ≈ 10^{10} K ≈ 1 MeV**.

Šta nam je potrebno?

- Algoritam koji od ulaznih podataka:
  - vrste čestica i njihov broj stepeni slobode
  - tipova interakcija (nuklearne, elektromagnetne) i njihove snage
  - kosmološkog modela
- daje predviđanja za:
  - početak i kraj reakcija u datoj epohi (nukleosintezi, rekombinaciji, itd.)
  - vrstu i količinu produkata.

Kinetička teorija

- Ludvig Bolcman (1872)
- Statistički sistem: mnogo podsistema! ($\sim N_A$)
- Opis kroz funkciju raspodele:

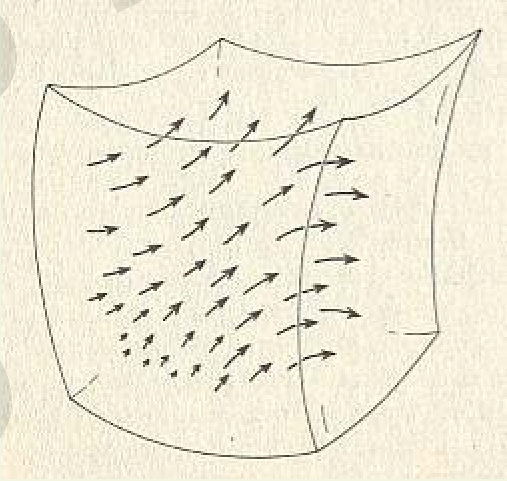
$$dN = f\left(\vec{r}, \vec{p}, t\right) d^3\vec{r}\, d^3\vec{p}$$

gde je element zapremine faznog prostora

$$d^3\vec{r}\, d^3\vec{p} = dx\, dy\, dz\, dp_x\, dp_y\, dp_z$$

Kako doći do jednačine za *f* ?

- Šta se dešava sa sistemom?



$$\frac{df}{dt} = C[f]$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{ext}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{diff}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{coll}}$$

- Spoljna sila **F** deluje prema Njutnovim zakonima, nakon intervala Δt imamo:

$$\vec{r} \to \vec{r} + \Delta\vec{r} = \vec{r} + \frac{\vec{p}}{m}\Delta t \qquad \vec{p} \to \vec{p} + \Delta\vec{p} = \vec{p} + \vec{F}\Delta t$$

- Zaboravimo (na trenutak) sudare – recimo zvezde ili CDM čestice!
- Tada mora važiti:

$$f\left(\vec{r}+\frac{\vec{p}}{m}\Delta t,\vec{p}+\vec{F}\Delta t,t+\Delta t\right)d^3\vec{r}\,d^3\vec{p}=f\left(\vec{r},\vec{p},t\right)d^3\vec{r}\,d^3\vec{p}$$

- (element zapremine faznog prostora se ne menja – **Liouvilleova teorema**)
- U realnosti, gustina u faznom prostoru se menja zbog sudara...

$$dN_{\text{coll}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}} \Delta t \, d^3\vec{r} \, d^3\vec{p} =$$

$$= f\left(\vec{r} + \frac{\vec{p}}{m}\Delta t, \vec{p} + \vec{F}\Delta t, t + \Delta t\right) d^3\vec{r} \, d^3\vec{p} - f\left(\vec{r}, \vec{p}, t\right) d^3\vec{r} \, d^3\vec{p} =$$

$$= \Delta f \, d^3\vec{r} \, d^3\vec{p}$$

- što, kad podelimo sa $\Delta t \, d^3\vec{r} \, d^3\vec{p}$ i uzmemo limes $\Delta t \to 0, \Delta f \to 0$ daje:

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}}$$

- Potreban nam je razvoj totalnog diferencijala...

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial p_x}dp_x + \frac{\partial f}{\partial p_y}dp_y + \frac{\partial f}{\partial p_z}dp_z\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \nabla f \cdot d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \cdot d\vec{p} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \nabla f \cdot \frac{\vec{p}\,dt}{m} + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \cdot d\vec{F}\,dt$$

- gde je $\cdot$ skalarni proizvod, a gradijent duž vektora:

$$\frac{df}{d\vec{p}} = \widehat{e}_x \frac{\partial f}{\partial p_x} + \widehat{e}_y \frac{\partial f}{\partial p_y} + \widehat{e}_z \frac{\partial f}{\partial p_z} \equiv \nabla_{\vec{p}}\, f$$

I tako stižemo do...

- ...najpoznatije forma Bolcmanove kinetičke jednačine:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\vec{p}}{m}\nabla f+\vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}}=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{coll}}$$

- Ovo važi za svaki pojedinačni tip čestica (pri čemu je neophodna dodatna informacija o statistici – klasične, fermioni ili bozoni)
- Bezkoliziona Bolcmanova jednačina

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{coll}}=0$$

se naziva **jednačina Vlasova**.

Kolizioni integral

- U opštem slučaju u **formi Bolcmana**:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}} = \iiint \Delta\sigma(\Delta,\Omega)\left[f\left(\vec{p}\,'_A,t\right)f\left(\vec{p}\,'_B,t\right)-f\left(\vec{p}_A,t\right)f\left(\vec{p}_B,t\right)\right]d\Omega\, d^3\vec{p}_A\, d^3\vec{p}_B$$

gde je razlika impulsa čestica u sudaru $\Delta \equiv \left|\vec{p}_A - \vec{p}_B\right| = \left|\vec{p}\,'_A - \vec{p}\,'_B\right|$

a Ω prostorni ugao u kojem se čestice rasejavaju.

- Ključna pretpostavka: **Stoβzahlansatz** („hipoteza molekularnog haosa“)
- Za sistem sa dalekodometnim interakcijama (plazma) ključan kolizioni integral u **formi Landaua**:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}}^{\text{Landau}} = \frac{1}{2}\Gamma^{ab}\frac{\partial}{\partial\vec{v}}\int d^3\vec{v}\,'U\left(v,v'\right)\left(\frac{\partial}{\partial\vec{v}}-\frac{m_a}{m_b}\frac{\partial}{\partial\vec{v}\,'}\right)f_b\left(\vec{v}\,'\right)f_a\left(\vec{v}\right)$$

Vreme **za** **pauzu!**

- Posmatramo “sistem”: **1 + 2 ↔ 3 + 4**
- Nevažno je šta su reaktanti!
- U kosmološkom kontekstu možemo pisati:

$$a^{-3}\frac{d\left(n_1 a^3\right)}{dt}=\int\frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1}\int\frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}\int\frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3}\int\frac{d^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4}\cdot$$
$$\cdot(2\pi)^4\delta^3\left(\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{p}_3-\vec{p}_4\right)\delta\left(E_1+E_2-E_3-E_4\right)\left|\mathrm{M}\right|^2\cdot$$
$$\cdot\left[f_3 f_4\left(1\pm f_1\right)\left(1\pm f_2\right)-f_1 f_2\left(1\pm f_3\right)\left(1\pm f_4\right)\right]$$

naravno, Dirakova delta je: $\int f(x)\delta(x-a)\,dx\equiv f(a)$

Aproksimacije, aproksimacije...

- U gornjoj jednačini 1+*f* se odnosi na **bozone**, a 1–*f* na **fermione**!
- Za energiju *E* koristimo relativistički izraz

$$E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2}$$

(sad malo koristimo $c = k = 1$!)

- M je konstanta interakcije (npr. za elektromagnetsku interakciju, M ~ $\alpha \approx$ 1/137).

- Fermi-Dirakova statistika:

$$f_{FD}\left(E\right)=\frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{T}}+1}$$

- Boze-Ajnštajnova statistika:

$$f_{BE}\left(E\right)=\frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{T}}-1}$$

- što postaje klasična (Meksvel-Bolcmanova) statistika kada važi:

$$T<E-\mu \quad \Rightarrow \quad f\left(E\right)\rightarrow e^{\frac{\mu}{T}}e^{-\frac{E}{T}}$$

$$f_3 f_4\left(1\pm f_1\right)\left(1\pm f_2\right)-f_1 f_2\left(1\pm f_3\right)\left(1\pm f_4\right)\rightarrow e^{-\frac{E_1+E_2}{T}}\left[e^{\frac{\mu_3+\mu_4}{T}}-e^{\frac{\mu_1+\mu_2}{T}}\right]$$

Ključni pojam: ravnotežna gustina

- Gustina (koncentracija) klasičnih čestica:

$$n_i = g_i e^{\frac{\mu_i}{T}} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-\frac{E_i}{T}}$$

- **Ravnotežna gustina** vrste *i* definiše se kao:

$$n_i^{(0)} \equiv g_i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-\frac{E_i}{T}} = \begin{cases} g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_i}{T}}, & m_i \gg T \\ g_i \frac{T^3}{\pi^2}, & m_i \ll T \end{cases}$$

- Iz definicije ravnotežne gustine sledi: $e^{\frac{\mu_i}{T}} = \frac{n_i}{n_i^{(0)}}$

što omogućuje eliminaciju hemijskog potencijala:

$$f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4) = e^{-\frac{E_1+E_2}{T}} \left[\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right]$$

- Definišemo **termalno usrednjeni presek za interakciju**:

$$\langle \sigma v \rangle \equiv \frac{1}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{E_1+E_2}{T}} (2\pi)^4 \delta^3 (p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta (E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |\mathrm{M}|^2$$

Bolcmanova jednačina, v.2

- Sakupljanjem svih aproksimacija na gomilu, dobijamo:

$$\boxed{a^{-3}\frac{d\left(n_1 a^3\right)}{d\quad t} = n_1^{(0)} n_2^{(0)} \langle \sigma v \rangle \left[\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right]}$$

- Odavde proističu bukvalno desetine ključnih numeričkih rezultata za rani svemir!
- Zapaziti: dovoljno rano leva strana je □ $\frac{n_1}{t} = n_1 H$
- Na desnoj strani imamo nešto što liči na tradicionalnu **brzinu reakcije**: □ $n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle$

Najvažniji specijalni slučaj

- Suprotne tendencije: brzina reakcije vs. „brzina“ širenja svemira!
- Kada je $n_2 \langle \sigma v \rangle \gg H$ reakcija se odigrava kvaziravnotežno i Bolcmanova jednačina nam daje približno:

$$\frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} = \frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}}$$

- Ovo se zove **Saha ravnoteža** (NSE, itd.)!

Primena: nukleosinteza

- Razmotrimo reakciju $n + p \leftrightarrow d + \gamma$ i zapazimo da za fotone važi $n_\gamma = n_\gamma^{(0)}$.
- Saha ravnoteža nam daje:

$$\frac{n_d}{n_n n_p} = \frac{n_d^{(0)}}{n_n^{(0)} n_p^{(0)}} = $$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{2\pi m_d}{m_n m_p T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{m_n + m_p - m_d}{T}\right)$$

pošto je $\frac{3}{4} = \frac{g_d}{g_n g_p}$

- Uvedimo oznaku za defekt mase deuterona:

$$B_d \equiv m_n + m_p - m_d = 2{,}22\ \mathrm{MeV}$$

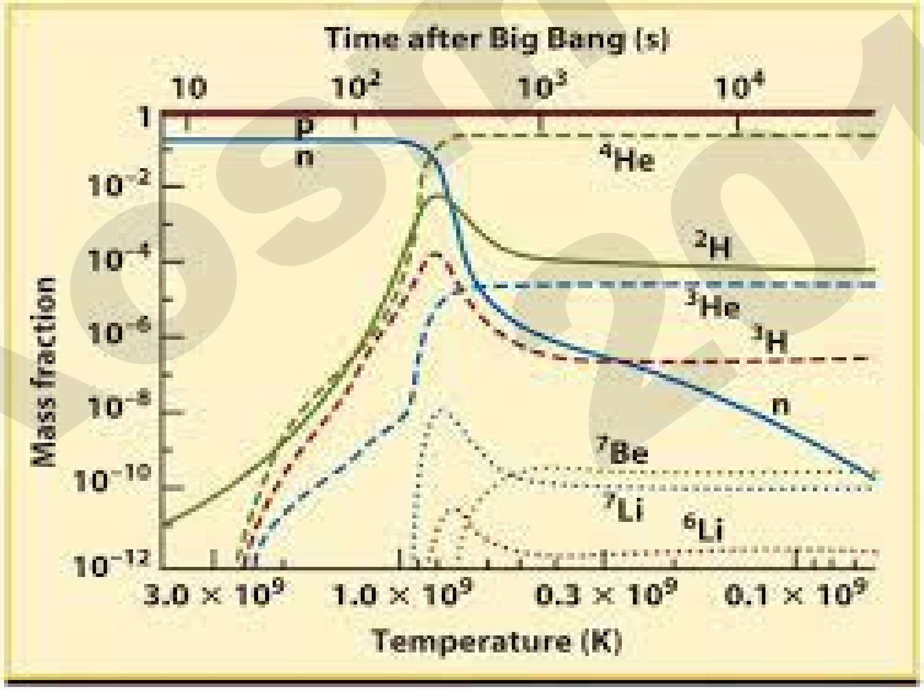
- Uz aproksimaciju $m_d \approx 2m_n$ dobijamo:

$$\frac{n_d}{n_n n_p} = \frac{3}{4}\left(\frac{4\pi}{m_p T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{B_d}{T}}$$

odnosno:

$$\frac{n_d}{n_b} \simeq \eta_b \left(\frac{T}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{B_d}{T}}$$

- Za T > 0,1 MeV svi barioni su u obliku izolovanih protona i neutrona!
- Nukleosinteza zaustavljena zbog nepostojanja A = 5! Drugim rečima, nemoguća je reakcija $^{4}\mathrm{He} + p \to {}^{5}\mathrm{X}$



Nastaviće

se

!