

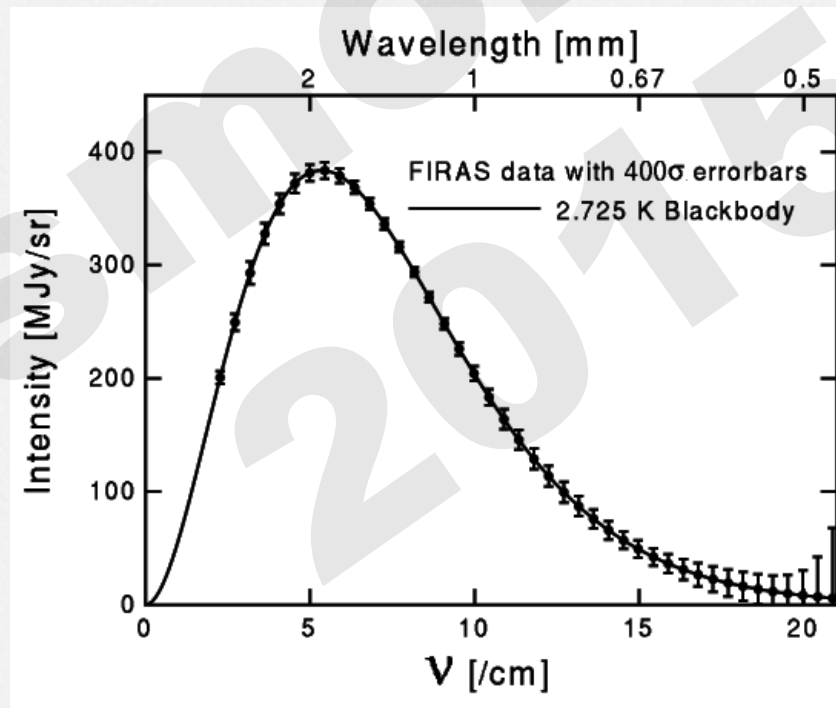
Intrinsične CMB anizotropije

21. 08. 2015.

Pre svega:

o Koristimo vrednost za današnju temperaturu:

$$T_0 = 2,725 \pm 0,002 \text{ K} \quad (\text{COBE}; 99,99\ldots\%)$$



Zatim: koncentracija CMB fotona

- Plankov zakon crnog tela:

$$n_T(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

- Gustina energije zračenja je $\int_0^\infty h\nu n_T(\nu) d\nu = aT^4$

- gde je a konstanta zračenja blisko vezana za Štefan-Bolcmanovu konstantu:

$$a = \frac{4\sigma}{c} = \frac{8\pi k_B^4}{15h^3 c^3} \approx 7,57 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$$

- Ekvivalentna masena gustina **danas** iznosi:

$$\rho_{\gamma 0} = aT_0^4 = 4,64 \times 10^{-34} \text{ g cm}^{-3}$$

- o Ovo odgovara kosmološkoj gustini:

$$\Omega_\gamma \equiv \frac{\rho_{\gamma 0}}{\rho_{0\text{crit}}} = 2,47 \times 10^{-5} h^{-2}$$

- o Za razliku od toga, koncentracija je i danas prilično velika:

$$n_{\gamma 0} = \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} = \frac{30 \zeta(3) a T^3}{\pi^4 k_B} = 20,28 \left(\frac{T}{1 \text{ K}} \right)^3 \text{ cm}^{-3}$$

gde je

$$\zeta(3) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{\Gamma(3)} \int_0^\infty \frac{x^{3-1}}{e^x - 1} dx \approx 1,202057\dots$$

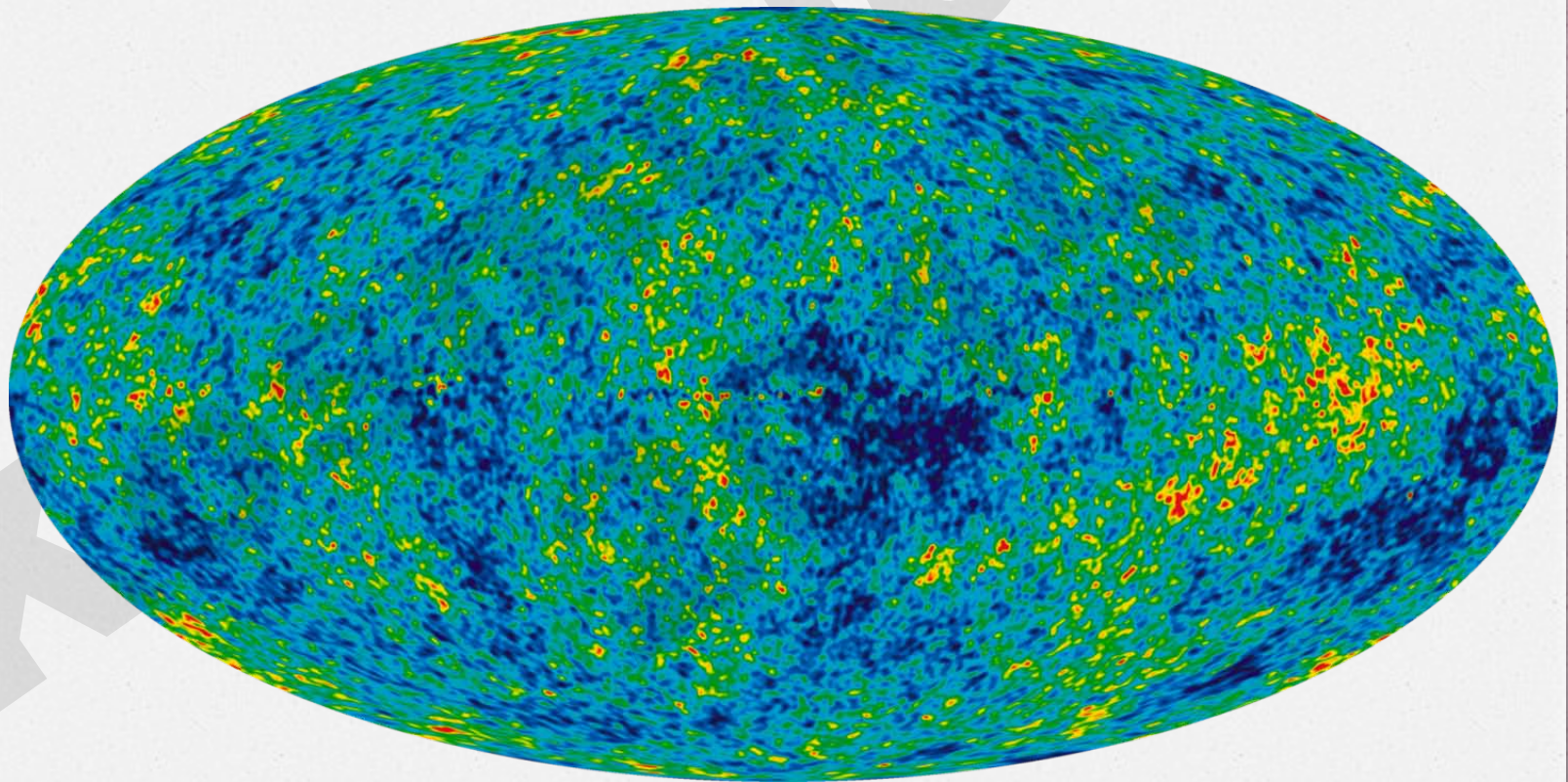
- o Za COBE-vrednost CMB temperature ovo daje:

$$n_{\gamma 0} = 410 \text{ fotona cm}^{-3}$$

Anizotropije

- **Primarne** (pre i na samoj površi poslednjeg rasejanja):
 - Sachs-Wolfeov efekat
 - akustičke oscilacije („talasi u plazmi“)
 - difuziono (Silkovo) prigušenje
- **Sekundarne** (efekti interakcija sa materijom, uklj. polja, od površi poslednjeg rasejanja do posmatrača):
 - integrisani Sachs-Wolfeov efekat
 - Sunjajev-Zeljdovičev efekat
 - Rees-Sciama efekat
 - gravitaciona sočiva
 - itd. itd.

OK, imamo CMB mapu – kako
da je kvantitativno predstavimo?



Razvoj sferno-simetričnih funkcija

- o Rešenja Laplasove jednačine:

$$\nabla^2 f(r, \vartheta, \varphi) = 0$$

su u opštem slučaju potencijali:

$$V(\vec{x}) = \sum_i \frac{m_i}{|\vec{x}_i - \vec{x}|}$$

- o Za $r \leq r_1$ razvoj potencijala po Ležandrovim polinomima:

$$\frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}|} = \frac{1}{r_1} P_0(\cos \vartheta) + \frac{r}{r_1^2} P_1(\cos \vartheta) + \frac{r^2}{r_1^3} P_2(\cos \vartheta) + \dots$$

Sferni harmonici...

- o ...su skup funkcija opšteg oblika

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) \equiv Y_l^m(\hat{n}) = K e^{im\varphi} P_l^m(\cos \vartheta)$$

- o koje sačinjavaju ortonormirani bazis, za koje važi:

$$r^2 \nabla^2 Y_l^m(\vartheta, \varphi) = -l(l+1) Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

- o Sferni harmonici su svojstvene funkcije operatora ugaonog momenta $-i\hbar \vec{r} \times \nabla$
- o Pošto su u opštem slučaju u pitanju kompleksne funkcije realnih promenljivih, važi i:

$$Y_l^{m*}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_l^{-m}(\vartheta, \varphi)$$

Različite konvencije...

- o U kvantnoj mehanici:

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

Congdon-Shortley-ijeva
faza

- o u većini ostalih nauka, uklj. kosmologiju:

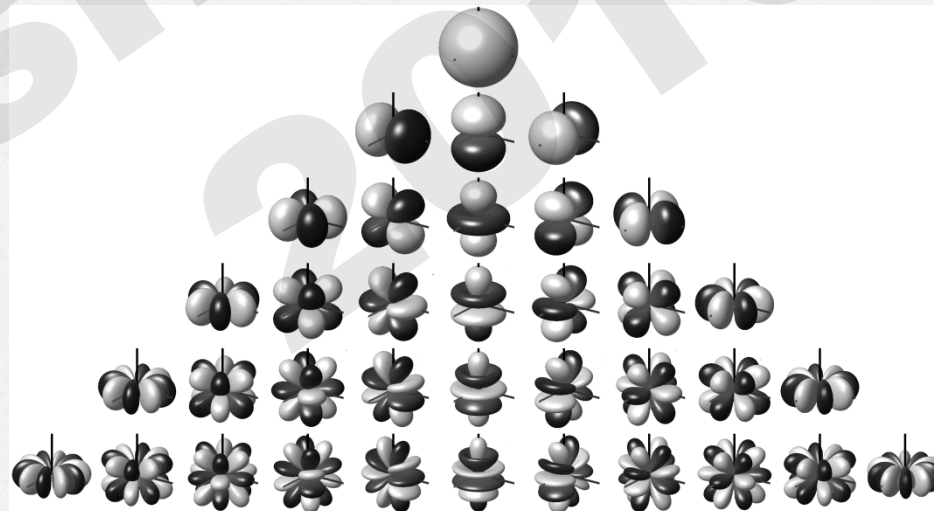
$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

- o l je orbitalni broj (broj ugaonog momenta)
- o m je magnetni broj (broj magnetnog momenta)

Važan rezultat za normalizaciju

o Unsoldova teorema:

$$\sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^* (\vartheta, \varphi) Y_{lm} (\vartheta, \varphi) = \frac{2l+1}{4\pi}$$



Prvih par sfernih harmonika...

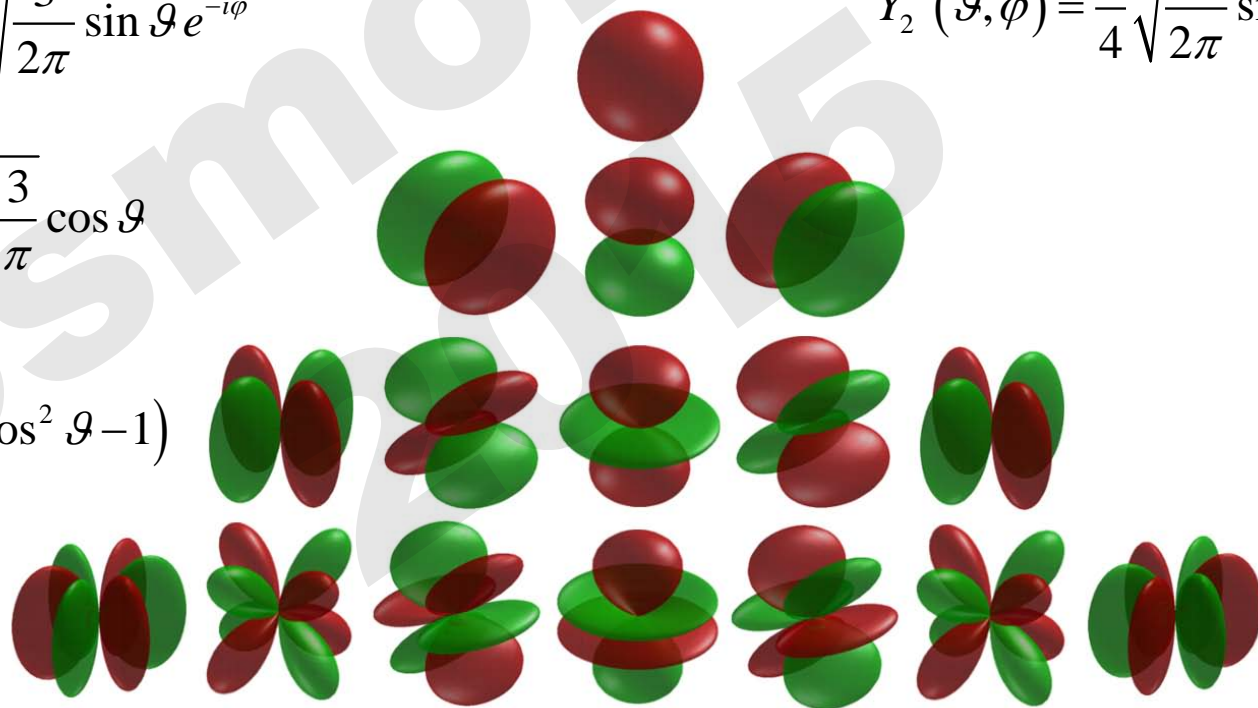
$$Y_0^0(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

$$Y_1^{-1}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \vartheta e^{-i\varphi}$$

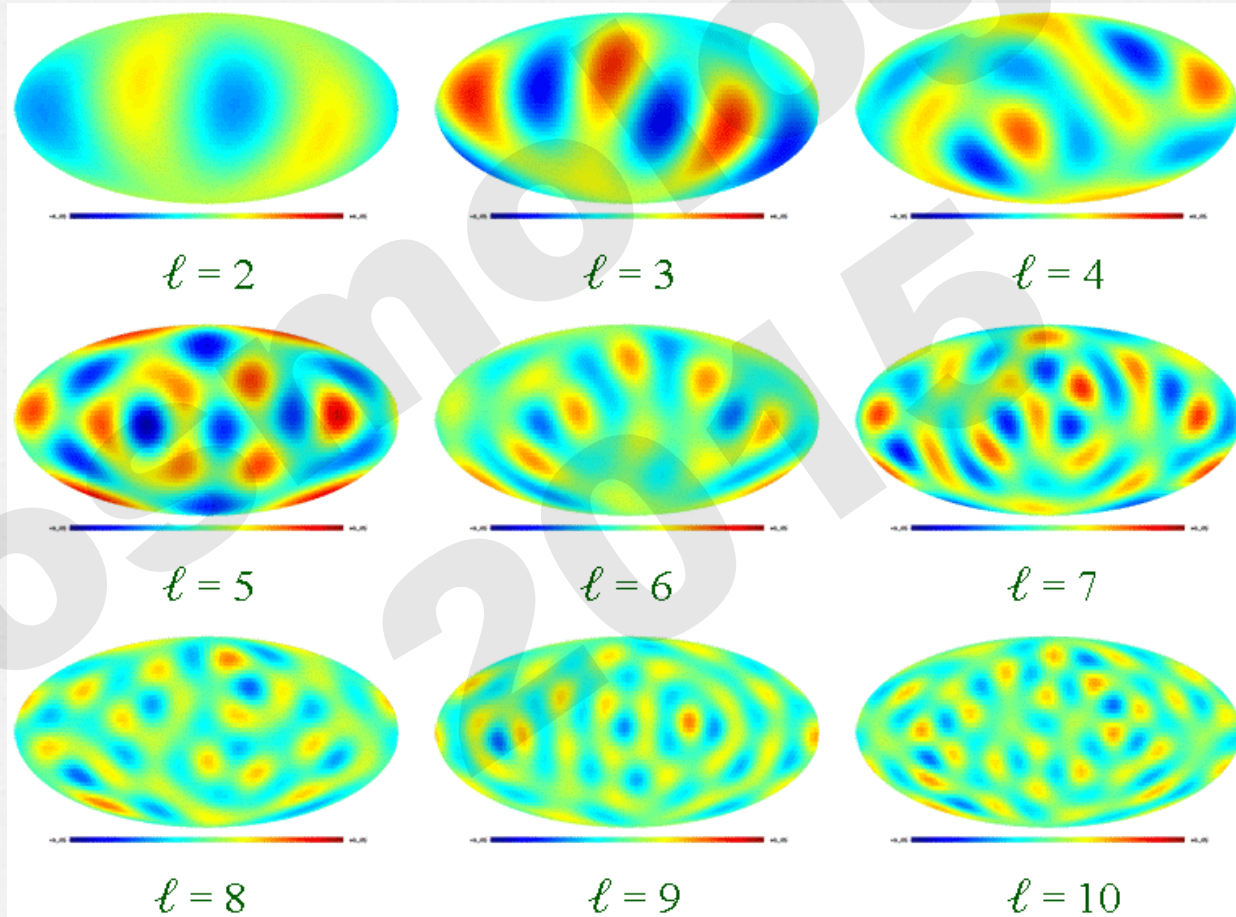
$$Y_2^2(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi}$$

$$Y_1^0(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \vartheta$$

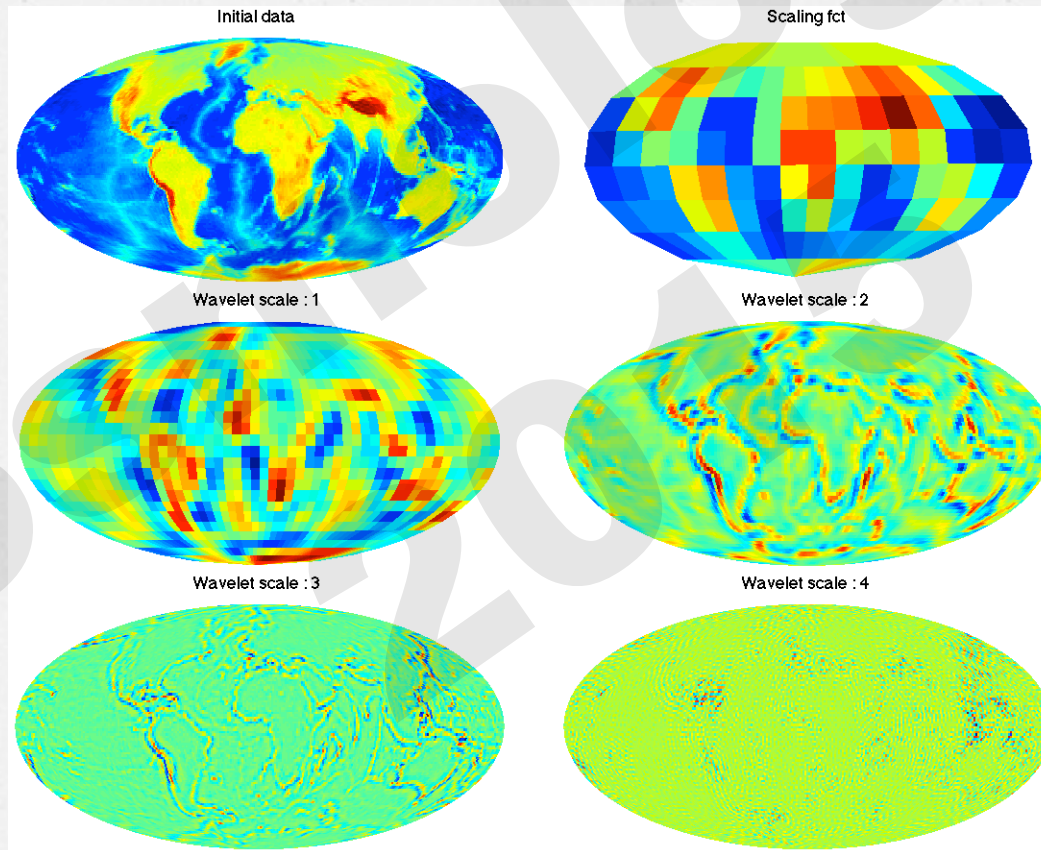
$$Y_2^0(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$$



U projekciji na nebesku sferu



Inače, **svaka** mapa se može rastaviti po multipolima...



Razlaganje anizotropija

- o Razlike u CMB temperaturi pišemo kao:

$$\Delta T(\hat{n}) \equiv T(\hat{n}) - T_0 = \sum_{lm} a_{lm} Y_l^m(\hat{n})$$

- o gde se srednja temperatura može definisati kao srednja vrednost:

$$T_0 \equiv \frac{1}{4\pi} \int d^2\hat{n} T(\hat{n})$$

- o Pošto nas zanimaju **srednje vrednosti**, definišemo

$$\langle a_{lm} a_{l'm'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{m-m'} C_l$$

za šta je proizvod ΔT -ova rotaciono invarijantan:

$$\langle \Delta T(\hat{n}) \Delta T(\hat{n}') \rangle = \sum_{lm} C_l Y_l^m(\hat{n}) Y_l^{-m}(\hat{n}')' = \sum_l C_l \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right) P_l(\hat{n} \cdot \hat{n}')$$

Drugim rećima...

$$T(\vartheta, \varphi) = T_0 + \delta T(\vartheta, \varphi)$$

$$\langle a_{lm} \rangle = 0$$

$$\frac{\delta T(\vartheta, \varphi)}{T_0} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

o C_l su **multipolni koeficijenti**:

$$C_l \equiv \langle |a_{lm}|^2 \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_m |a_{lm}|^2$$

Ključna stvar:

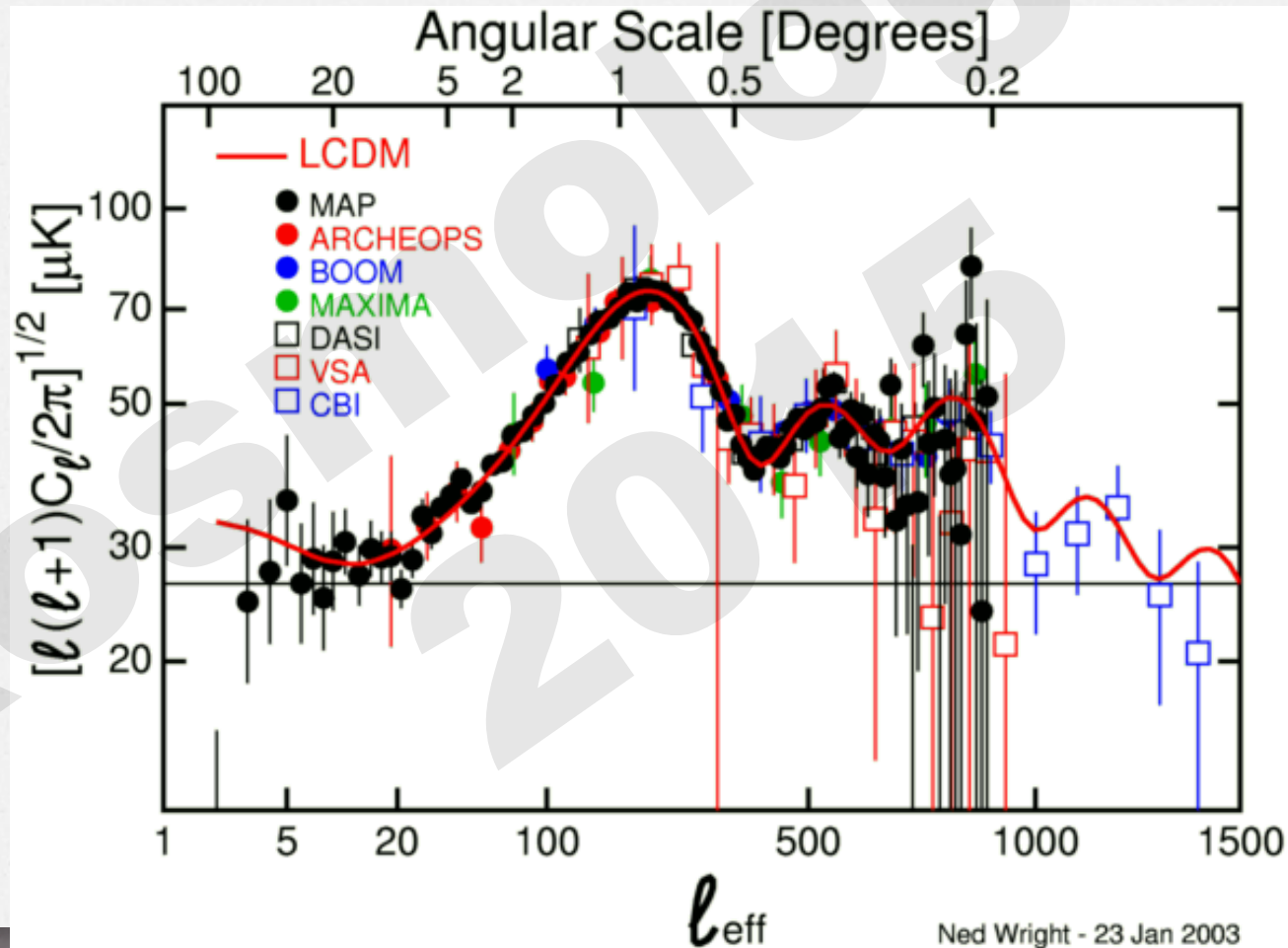
- o **Mi ne možemo da usrednjavamo anizotropije po položajima u prostoru!**
- o Ono što se opservira jesu multipolni koeficijenti usrednjeni po m ali ne i po položaju:

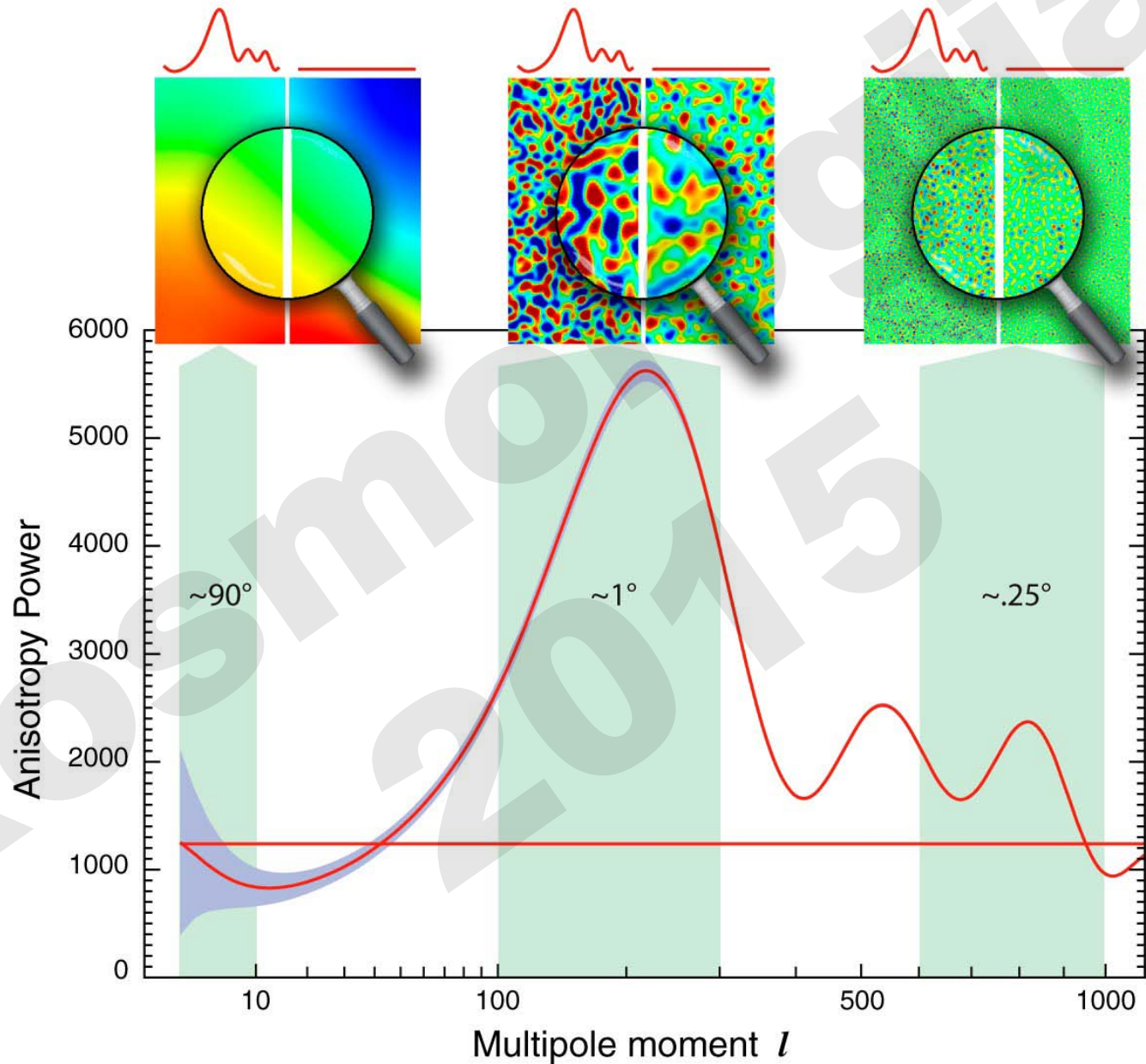
$$C_l^{\text{obs}} \equiv \frac{1}{2l+1} \sum_m a_{lm} a_{l-m} = \frac{1}{4\pi} \int d^2\hat{n} d^2\hat{n}' P_l(\hat{n} \cdot \hat{n}') \Delta T(\hat{n}) \Delta T(\hat{n}')$$

- o Relativna razlika između kosmološki interesantnih „pravih“ multipolnih koeficijenata i posmatranih se naziva **kosmička varijansa**:

$$\left\langle \left(\frac{C_l - C_l^{\text{obs}}}{C_l} \right)^2 \right\rangle = \frac{2}{2l+1}$$

Spektar ugaonih anizotropija







Vreme



za



pauzu!



Sachs-Wolfeov efekt

- o = **gravitacioni crveni pomak usled postojanja nehomogenosti gustine na površi poslednjeg rasejanja.**
- o Rainer Sachs & Arthur Wolfe (1967)
- o Ideja: stvaranje strukture stvara gravitacioni potencijal Φ koji ne utiče bitno na fotone pre površi poslednjeg rasejanja, ali počinje da utiče nakon nje.
- o Čuveni rezultat:

$$\left(\frac{\Delta T}{T} \right)_{SW} = -\frac{1}{3} \Phi$$

Grubo govoreći...

- o Gravitacioni crveni pomak pomera linearno talasne dužine, pa i temperature:

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_1 = -\Phi(\hat{n}r_L)$$

- o Njemu je suprotstavljen „Doplerov“ efekat zbog **smanjene** stope širenja tamo gde je prisutan potencijal!

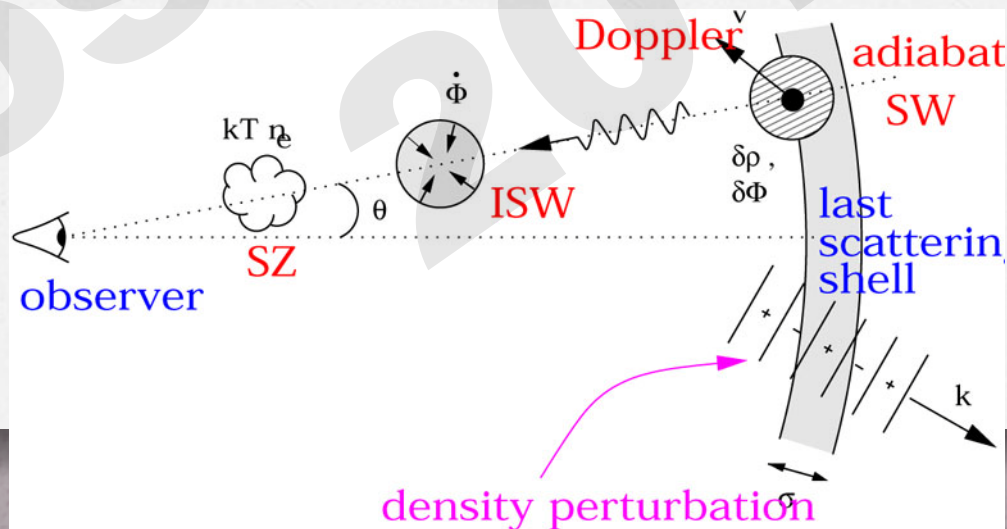
$$T \propto a^{-1} \propto t^{-2/3}$$

$$\left(\frac{\delta z}{1+z} \right)_{\text{recomb}} = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)_{\text{recomb}} \left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_2 = \frac{2}{3} \Phi(\hat{n}r_L)$$

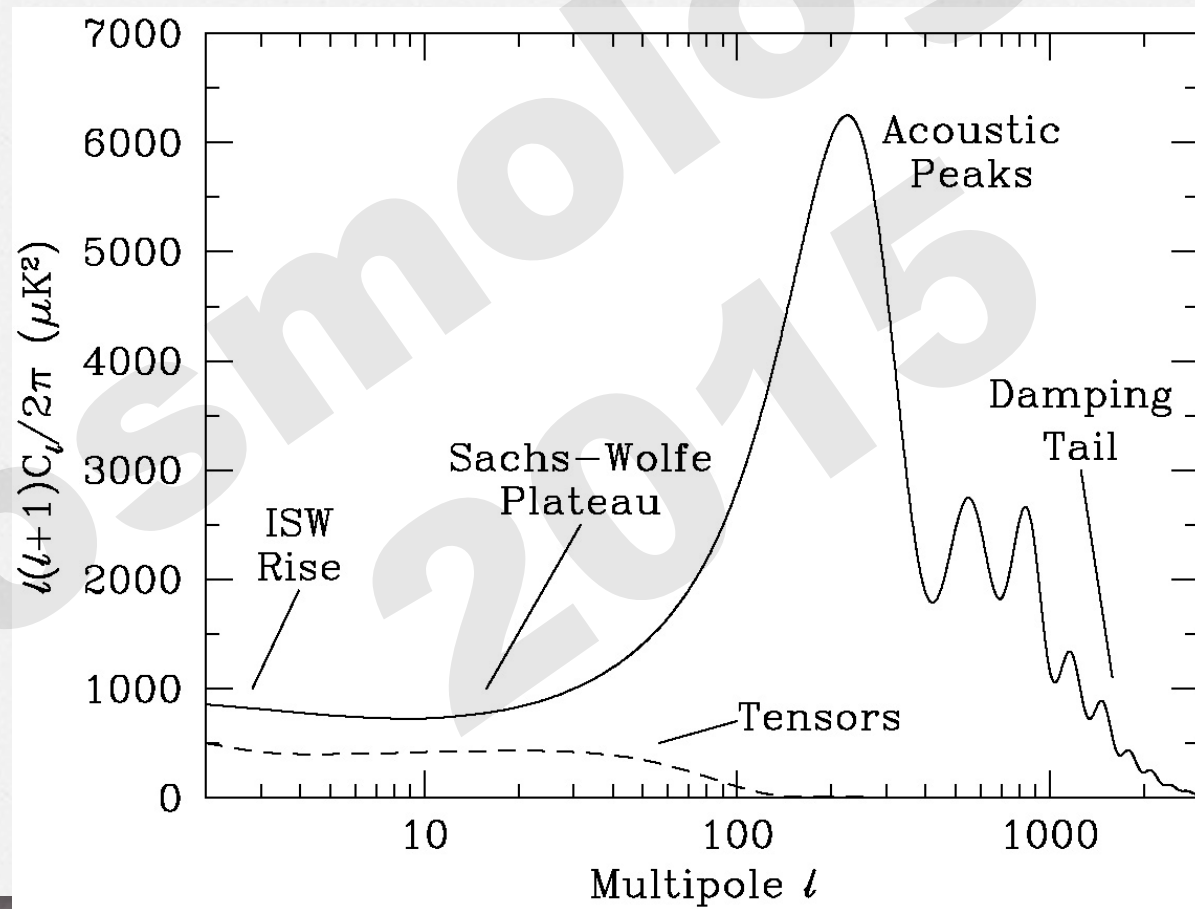
Sveukupno...

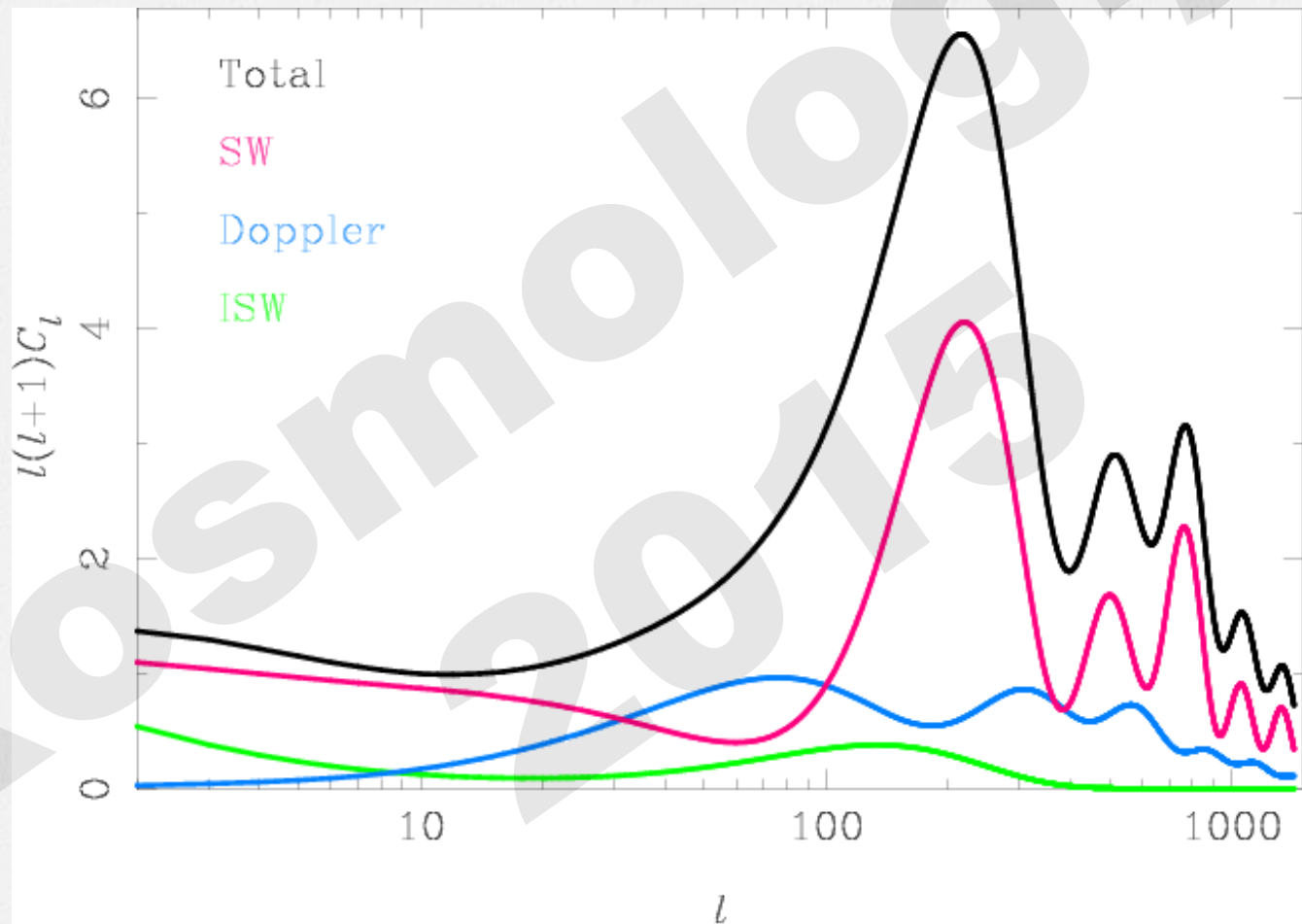
- Totalna promena, gledano daleko od površi poslednjeg rasejanja, mora biti

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_{SW} = \left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_1 + \left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_2 = -\frac{1}{3} \Phi(\hat{n}r_L)$$



SW dominant $10 < l < 50$





Nastaviće

se

!