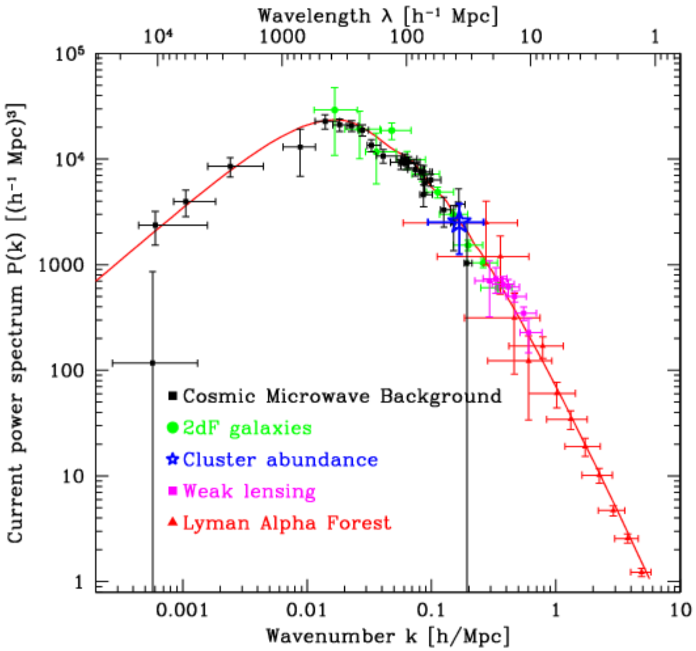
Linearni rast perturbacija i Press-Schechterov formalizam

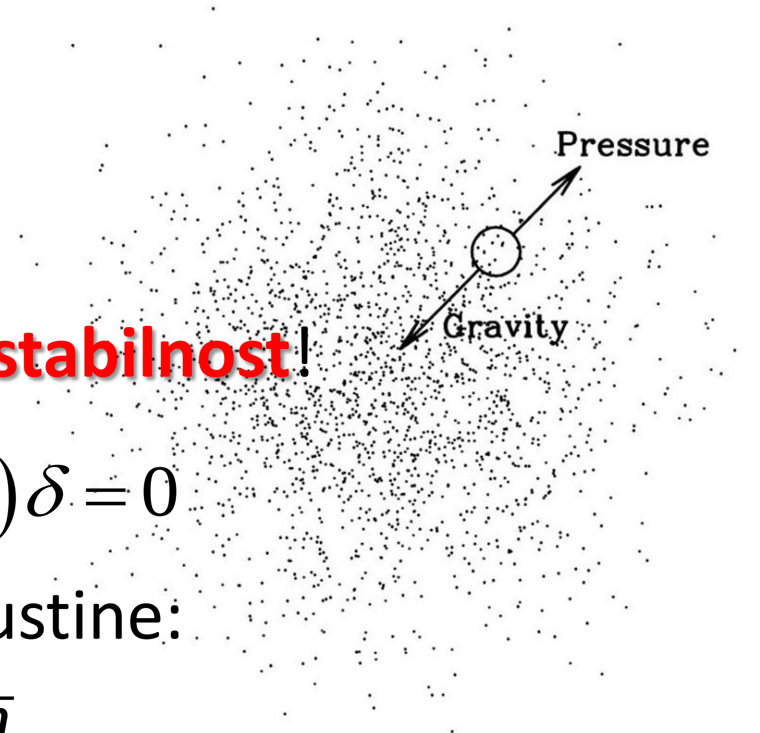
16. 10. 2015.

Ciljevi:

- Objasniti poreklo spektra perturbacija!
- Objasniti poreklo funkcije sjaja galaksija (Schechterove funkcije)!



Nehomogenosti?



- Ključna ideja - **gravitaciona nestabilnost**!

$$\ddot{\delta}+(\text{pritisak}-\text{gravitacija})\delta=0$$

- gde je δ uvećanje (kontrast) gustine:

$$\delta(\vec{x})=\left[n(\vec{x})-\bar{n}\right]/\bar{n}$$

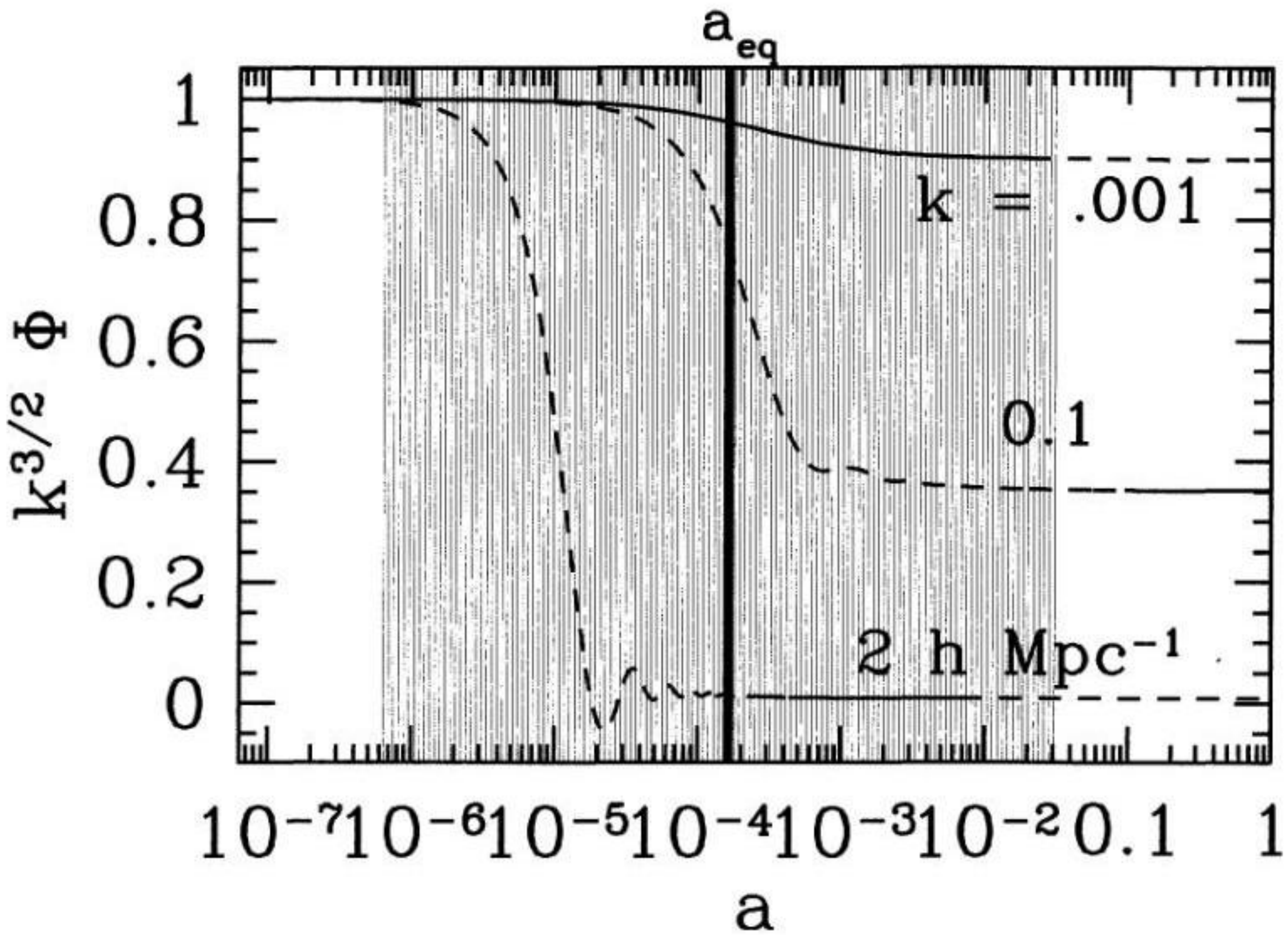
- Furije-transform od $\delta(\vec{x})$ je kontrast gustine u prostoru talasnih brojeva $\tilde{\delta}(\vec{k})$.
- Često se izostavlja oznaka "~"!
- Spektar perturbacija (*power spectrum*) definisan je sa

$$\left\langle \tilde{\delta}(\vec{k})\tilde{\delta}(\vec{k}')\right\rangle=(2\pi)^3 P(k)\delta^3_{\text{Dirac}}\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)$$

- Spektar je širina (**varijansa**) raspodele: ako postoji mnogo oblasti visokog kontrasta gustine *P* će biti veliko, dok ako je raspodela blizu homogene, *P* je malo.
- Početne uslove daje inflacija: Harison-Zeljdovičev spektar perturbacija nezavisan od skale (*scale-invariant*):

$$P_{\Phi}\left(k\right) \propto k^{-3}.$$

- Tri prirodna režima evolucije gravitacionih perturbacija:
  - **rani period**: sve perturbacije van horizonta; gravitacioni potencijal Φ konstantan;
  - **prelazni period**: neke talasne dužine padaju unutar horizonta + svemirom počinje da dominira materija;
  - **kasni period**: sve perturbacije evoluiraju na isti način.



a_eq
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
k^3/2 Φ
k = .001
0.1
2 h Mpc^-1
10^-7 10^-6 10^-5 10^-4 10^-3 10^-2 0.1 1
a

Rekonstrukcija tri režima

- U kasnom periodu možemo pisati:

$$\Phi\left(\vec{k},a\right)=\Phi_P\left(\vec{k}\right)\times\left\{\text{funkcija transfera }(k)\right\}\times\left\{\text{funkcija rasta }(a)\right\}.$$

- Funkcija transfera *T(k)* opisuje evoluciju perturbacija kroz epohu prolaska kroz horizont i tranzicije zračenje/materija:

$$T(k)\equiv\frac{\Phi\left(k,a_{\text{kasno}}\right)}{\Phi_{\text{large-scale}}\left(k,a_{\text{kasno}}\right)}$$

- gde a_{kasno} označava neku epohu posle režima tranzicije, dok je *large-scale* rešenje primordijalno Φ umanjeno za malu vrednost (detaljan proračun pokazuje da je to 9/10 primordijalnog Φ).

- Funkcija rasta $D_1(a)$ opisuje rast u kasnim epohama (zbog širenja kosmosa); za $a > a_{\text{kasno}}$ imamo:

$$\frac{\Phi(a)}{\Phi(a_{\text{kasno}})} \equiv \frac{D_1(a)}{a}.$$

- Npr. u najjednostavnijem E-dS modelu potencijal je konstantan, pa je $D_1(a) = a$.
- Iz prethodnog imamo

$$\Phi(k,a) = \frac{9}{10}\Phi_P(\vec{k})T(k)\frac{D_1(a)}{a},$$

za $a > a_{\text{kasno}}$.

- Uvećanje gustine treba povezati sa gravitacionim potencijalom $\rightarrow$ potrebna nam je Poasonova jednačina!
- Najjednostavniji oblik za kasne epohe i velike vrednosti *k* je:

$$\Phi = \frac{4\pi G a^2 \rho_m \delta}{k^2},$$

pošto $\Delta \equiv \nabla^2 \rightarrow \frac{1}{k^2}$

- Podsetimo se: $\rho_m = \Omega_m \rho_{\mathrm{crit}} / a^3$, $4\pi G \rho_{\mathrm{crit}} = \frac{3}{2} H_0^2$ (za E-dS)
- Uz ovo, rešavajući Poasonovu jednačinu po kontrastu gustine imamo:

$$\delta\left(\vec{k},a\right) = \frac{k^2 \Phi\left(\vec{k},a\right) a}{\left(3/2\right)\Omega_m H_0^2}.$$

- Ovo nam omogućuje da povežemo uvećanje gustine danas sa primordijalnim potencijalom (iz inflacije):

$$\delta\left(\vec{k},a\right) = \frac{3}{5}\frac{k^2}{\Omega_m H_0^2}\Phi_P\left(\vec{k}\right)T\left(k\right)D_1\left(a\right)$$

- **Malo dimenzione analize:** spektar perturbacija ima dimenzije (dužina)$^{-3}$ $\rightarrow$ moramo pomnožiti sa k^3 ako želimo bezdimenzionu veličinu!
- Često se definiše da je $d^3k P\left(k\right)/\left(2\pi\right)^3$ amplituda spektra u binu širine *dk* oko vrednosti *k*.
- Kada integrišemo po svim orijentacijama vektora *k* ovo postaje

$$\frac{dk}{k}\Delta^2\left(k\right), \quad \text{gde je} \quad \Delta^2\left(k\right) \equiv \frac{k^3 P\left(k\right)}{2\pi^2}.$$

Problemi linearne teorije

- Osnovni rezultat linearne teorije

$$\delta\left(\vec{k},a\right)=\frac{3}{5}\frac{k^2}{\Omega_m H_0^2}\Phi_P\left(\vec{k}\right)T\left(k\right)D_1\left(a\right)$$

- Kako izgleda funkcija transfera? kako izgleda funkcija rasta? kako da izračunate perturbacije uporedimo sa posmatranim (strukturom na velikoj skali, jatima, galaksijama, itd.)?
- Dva kvalitativna zapažanja:
  - Na velikim skalama spektar perturbacija **linearan**: $P\left(k\right)\propto k$
  - Spektar će imati **maksimum**, koji odgovara veličini onih perturbacija koje ulaze u horizont tačno u trenutku ravnoteže zračenja i materije $a=a_{eq}$.
- Na kojim skalama nelinearnosti nastale usled lokalne fizike postaju bitne?

$$k_{nl} \simeq 0.2\,h\,\mathrm{Mpc}^{-1}$$

Primeri numeričkih rezultata

- Funkcija transfera na malim skalama:

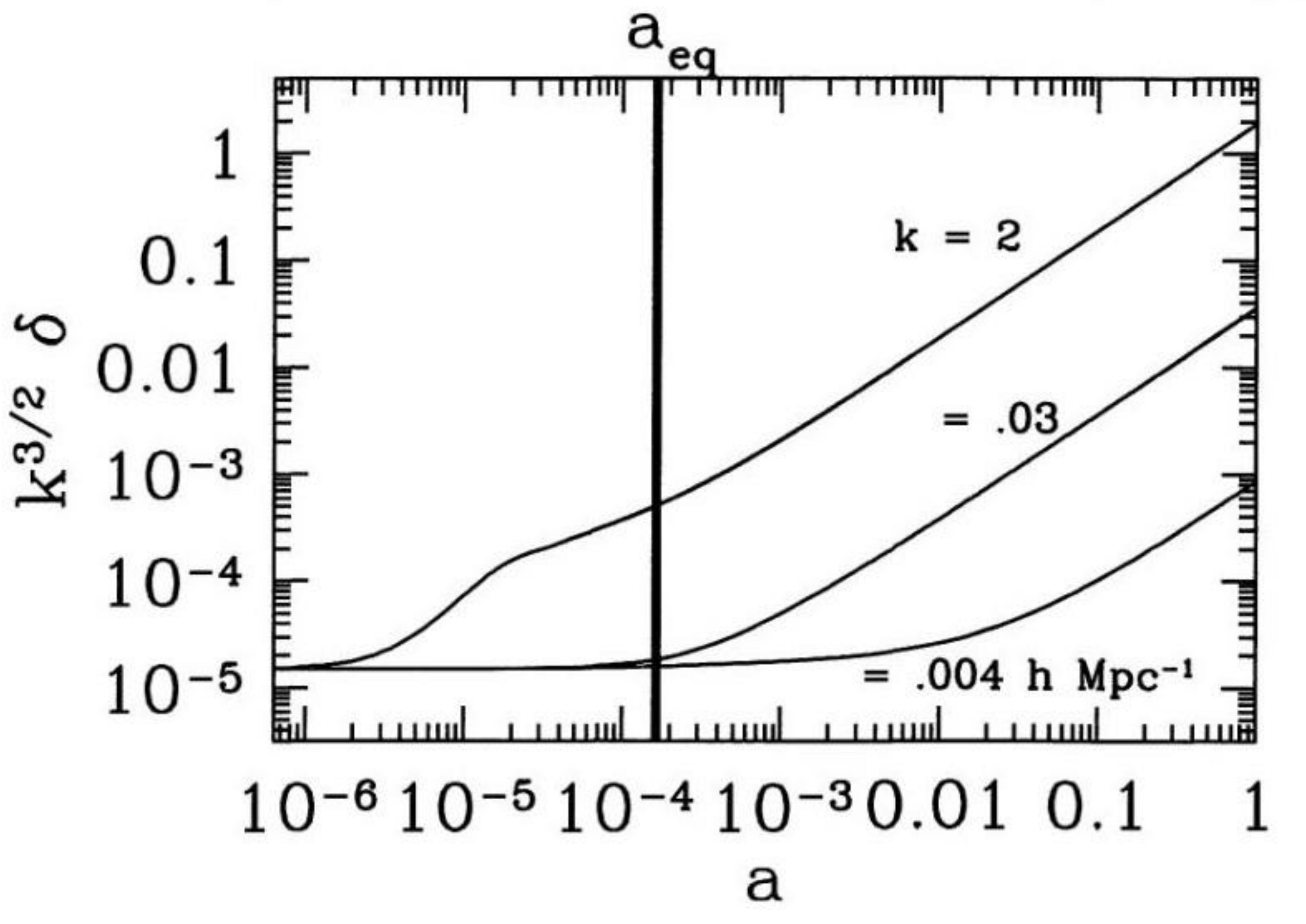
$$T(k) = \frac{5A\Omega_m H_0^2}{2k^2 a_{eq}} \ln\left[\frac{4Be^{-3}\sqrt{2}k}{k_{eq}}\right], \qquad k \gg k_{eq}$$

- Ovo se često piše u funkciji od $x \equiv k/k_{eq}$. Precizni proračuni daju funkciju transfera npr. u BBKS (*Bardeen – Bond – Kaiser – Szalay*) formi:

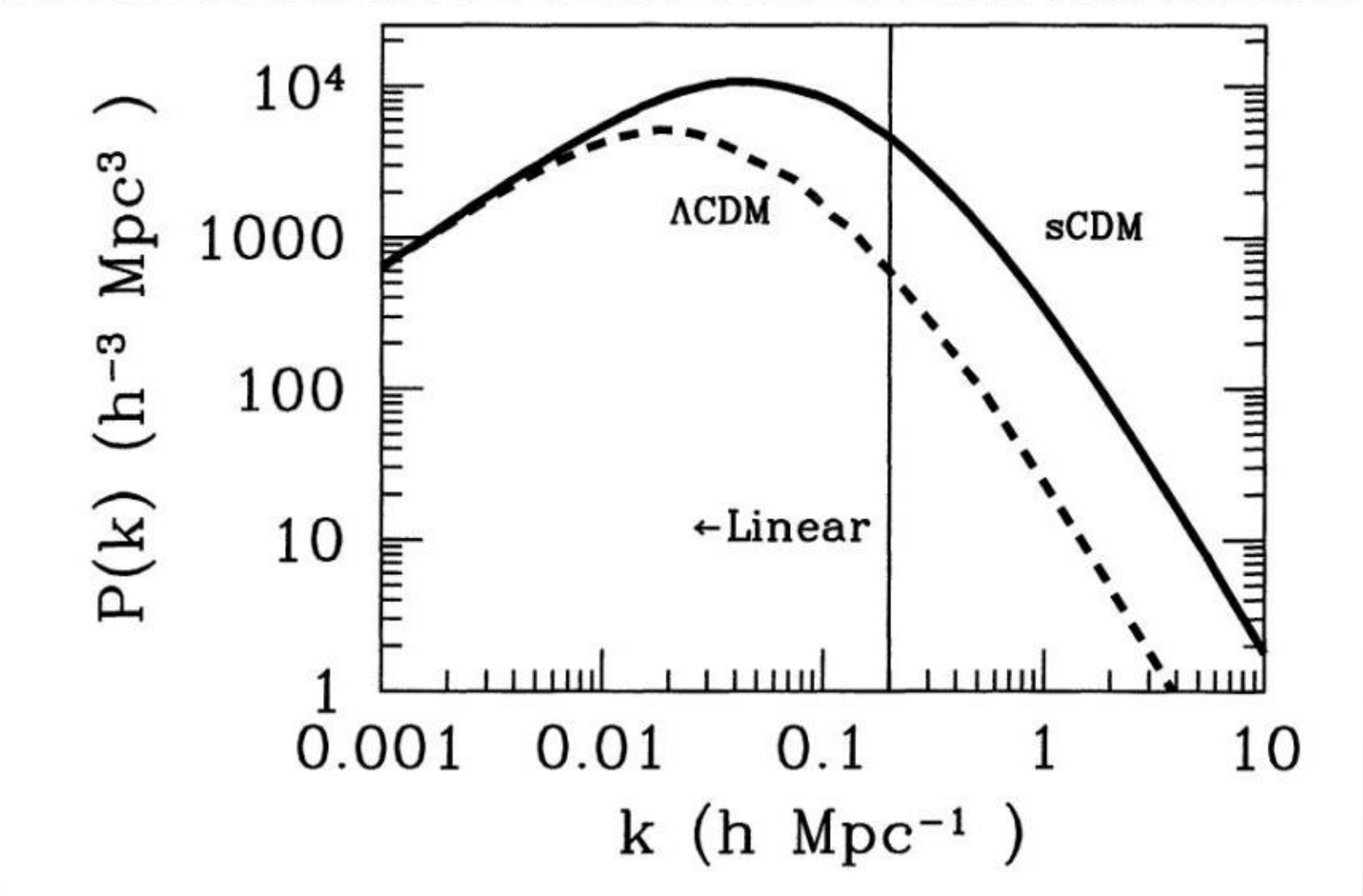
$$T(x) = \frac{\ln(1+0.171x)}{0.171x}\left[1+0.284x+(1.18x)^2+(0.399x)^3+(0.49x)^4\right]^{-0.25}$$

- Međutim, ni ovo još nije "stvarni svet" perturbacija! Više efekata koje je teško izračunati (komplikovanije perturbacije, npr. torzija, menjaju faktor 9/10; mala količina bariona, itd.).
- Tamna energija menja spektar perturbacija na velikoj skali u veoma poznim epohama! (nevažno sem za najveće strukture)

Kontrast gustine

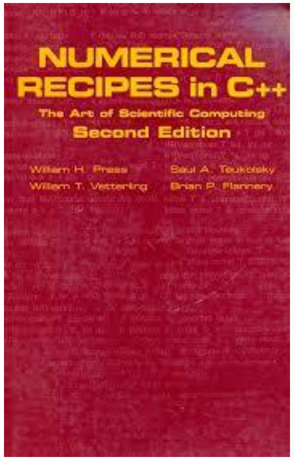


Spektar perturbacija (teorijski)



1974, Caltech...

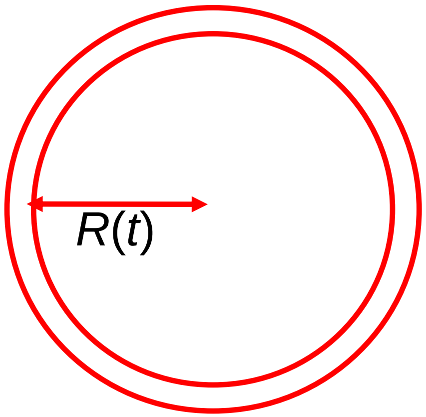
- Šta se dešava sa malim perturbacijama?
- Bil Pres pronalazi **veoma** dobrog studenta...
- Press, W. H. & Schechter, P. 1974, “Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation” *Astrophysical Journal*, Vol. **187**, pp. 425-438.
- Prvi i osnovni rezultat koji pokazuje vezu između teorije gravitacionih perturbacija i „realnog“ sveta galaksija.



Vreme za pauzu!

Sferni model kolapsa – “top hat”

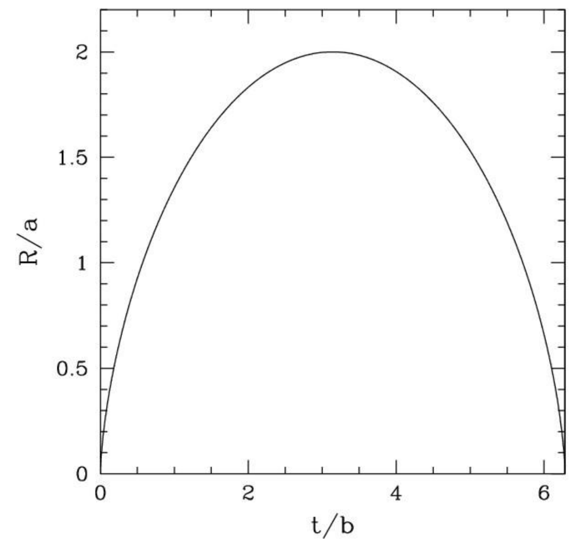
- Razmotrimo evoluciju sferne oblasti povećane gustine:



$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{2GM}{R} + 2E$$

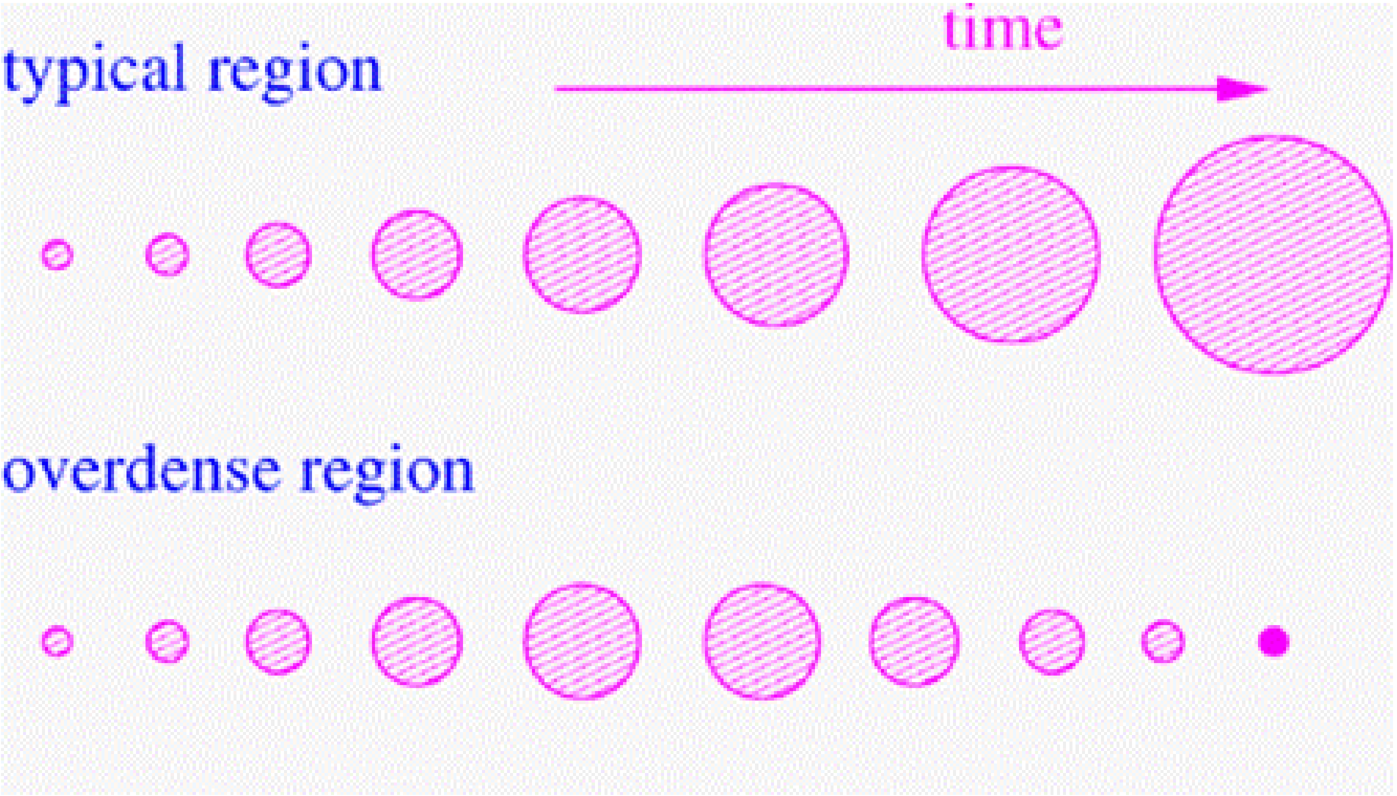
“Energija veze” $E < 0$: **vezan sistem**

$$\begin{cases} R = C^2(1 - \cos\theta) \\ t = \dfrac{C^3}{\sqrt{GM}}(\theta - \sin\theta) \end{cases}$$



C: konstanta integracije koja odgovara veličini sferne ljuske. Ova kriva se naziva **cikloida**.

NAPOMENA: Za $E > 0$ imamo formalno nevezan sistem $\Rightarrow$ odgovara prazninama (*void*-ovima)!


time
typical region
overdense region

Model sfernog kolapsa

- gustina regiona veće gustine i prosečna gustina:

$$\rho = M\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)^{-1} \qquad \bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \delta(t) = \frac{9GMt^2}{2R^3} - 1 = \frac{9}{2}\frac{(\theta - \sin\theta)^2}{(1-\cos\theta)^3}$$

- $\theta = \pi$: širenje prelazi u sažimanje (*turn around*)

$$R_{\text{turn}} = 2C^2 \qquad t_{\text{turn}} = \frac{\pi C^3}{\sqrt{GM}}$$

- $\theta = 2\pi$: kolaps ($R \to 0$)

$$t_{\text{coll}} = \frac{2\pi C^3}{\sqrt{GM}}$$

Virijalizacija

- U realnosti ne dolazi do kolapsa R $\rightarrow$ 0, već region povećane gustine postaje objekat sa virijalnim radijusom R_{vir}, putem mehanizma relaksacije.
- Iz održanja energije imamo:

$$\frac{GM^2}{R_{\mathrm{turn}}} = \frac{1}{2}\frac{GM^2}{R_{\mathrm{vir}}}$$

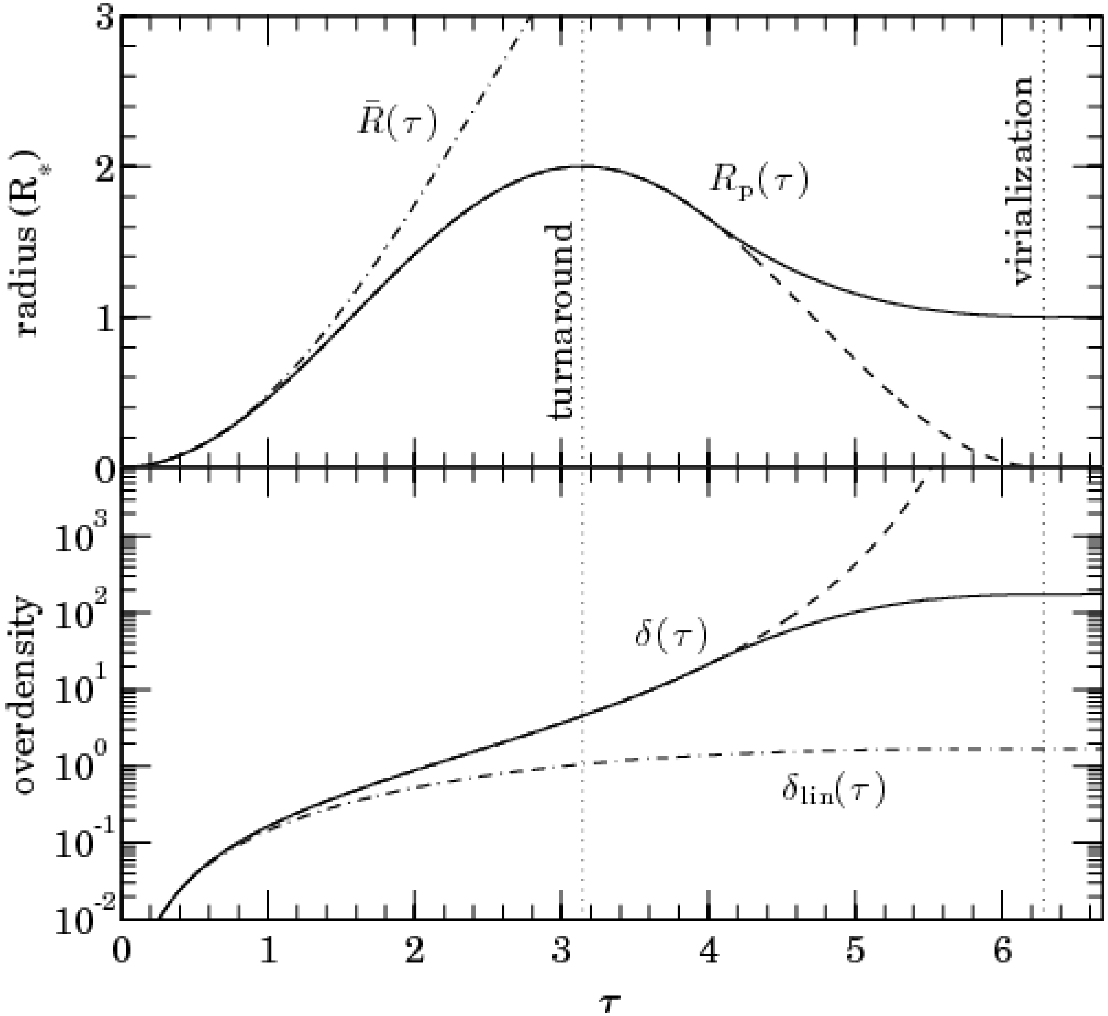
- Iz čega sledi

$$R_{\mathrm{vir}} = \frac{R_{\mathrm{turn}}}{2}$$

- a kontrast gustine virijalizovanog objekta je

$$\Rightarrow \quad \delta_{\mathrm{vir}} = \frac{M}{\left(\frac{4\pi R_{\mathrm{vir}}^2}{3}\right)\bar{\rho}(t_{\mathrm{coll}})} - 1 = 18\pi^2 - 1 \approx 177$$

Kako to izgleda u simulacijama?



Korespondencija sa linearnim režimom

- U ranoj fazi, rast je linearan; kako se θ povećava, imamo:

$$\begin{cases} \delta = \frac{3}{20}\theta^2 + O(\theta^4) \\ t = \frac{C^3}{6\sqrt{GM}}\theta^3 + O(\theta^5) \end{cases} \Rightarrow \quad \delta \propto t^{\frac{2}{3}}$$

- Linearni kontrast gustine:

$$\delta_{\mathrm{L}} = \frac{3}{20}\left(\frac{6\sqrt{GM}}{C^3}t\right)^{\frac{2}{3}}$$

- Pošto su i nelinearni kontrast u sfernom kolapsu i ovaj linearizovani kontrast monotone funkcije vremena, možemo proceniti δ iz δ_L ako imamo neku „fiksiranu“ tačku u relaciji δ_L-t

$$\delta_{\mathrm{L}}(t_{\mathrm{coll}}) = \frac{3(12\pi)^{\frac{2}{3}}}{20} \simeq 1.69$$

Stoga, smatramo region sa δ = 1.69 kolapsiranim objektom!

U realističnom λCDM...

- Cela ova diskusija se odnosila na E-dS model. Za realistični svemir δ_L postaje „malo“ komplikovanije (Nakamura & Suto 1997):

$$\Omega_{\rm vir} \equiv \Omega(t_{\rm vir}) \qquad \chi \equiv \frac{\Omega_\Lambda H_0^2 R_{\rm turn}}{GM} \qquad w_{\rm vir} \equiv \frac{1}{\Omega_{\rm vir}} - 1$$

$$\delta_{\rm coll} = \left(\frac{R_{\rm turn}}{R_{\rm vir}}\right)^3 \frac{2w_{\rm vir}}{\chi} - 1 \simeq 18\pi^2(1 + 0.04093 w_{\rm vir}^{0.9052}) - 1$$

$$\delta_{\rm L} = \frac{3}{5} F\left(\frac{1}{3}; 1; \frac{11}{6}; -w_{\rm vir}\right) \left(\frac{2w_{\rm vir}}{\chi}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{\chi}{2}\right) - 1$$

$$= \frac{3(12\pi)^{\frac{2}{3}}}{20} (1 + 0.0123 \log \Omega_{\rm vir})$$

(*F*: hipergeometrijska funkcija...)

Press & Schechter (1974)

Rešenje za linearni rast fluktuacija gustine + ekstrapolacija u nelinearni režim kroz top-hat sferni kolaps ⇒ **Analitički model formiranja haloa tamne materije!**

- Neka je broj objekata sa masom između M i M+dM jednak n(M) dM.
- Tada je n(M) funkcija mase, PS formalizam nam daje analitičko rešenje za funkciju mase.
- Počnimo od **usrednjene** gustine u top-hatu sa radijusom R koji odgovara masi M:

$$M = \frac{4\pi R^3}{3}\bar{\rho}$$

Ova usrednjena gustina se naziva fluktuacijom δ_M na masenoj skali *M*.

Originalna fluktuacija δ: normalna (Gausova) raspodela

$\Rightarrow$ usrednjena fluktuacija δ_M: normalna (Gausova) raspodela

$$P(\delta_M)\mathrm{d}\delta_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(M)^2}} e^{-\frac{\delta_M^2}{2\sigma(M)^2}} \mathrm{d}\delta_M$$

($\sigma(M)^2$: varijansa dM)

U određenom trenutku, ako linearizovana fluktuacija δ_M pređe kritični prag δ_c, formira se kolapsirani objekat sa masom M. Stavljamo $\delta_c = \delta_{coll} = 1.69$ kao za model sfernog kolapsa.

N.B. U novije vreme, teorijske studije sugerišu mnogo komplikovanije oblike za δ_c, sa ciljem da rekonstruišu realističnije fizičke uslove...

Verovatnoća da naiđemo na region sa $\delta > \delta_c$ je jednostavno:

$$P(>\delta_c)(M) = \int_{\delta_c}^{\infty} P(\delta_M)\mathrm{d}\delta_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(M)^2}} \int_{\delta_c}^{\infty} e^{-\frac{\delta_M^2}{2\sigma(M)^2}} \mathrm{d}\delta_M$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\delta_c}{\sigma(M)}}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x$$

Količina materije koja je uključena u objekte sa masama > *M* po jedinici zapremine je:

$$\bar{\rho} P(>\delta_c)(M)$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{\rho} P(>\delta_c)(M + \mathrm{d}M) - \bar{\rho} P(>\delta_c)(M) = \bar{\rho} \frac{\mathrm{d}P(>\delta_c)}{\mathrm{d}M} \mathrm{d}M$$

$$= n(M) M \mathrm{d}M$$

Pres-Šekterova „zvrčka“

- Prvo, ovde ignorišemo mogućnost da se jednom kolapsirani objekat ponovo nađe unutar većeg objekta koji kolapsira (tzv. *cloud-in-cloud* problem).
- Drugo, region sa $\delta < 0$ neće nikad biti uključen ni u jedan kolapsirani objekat. Ovo je nezgodno, pošto implicira da $P(>\delta_c) \rightarrow 1/2$ kad sumiramo po svim masama...
- Tada **jednostavno pomnožimo funkciju mase sa 2 da bismo izbegli problem!**

$$\Rightarrow \quad n(M)M\mathrm{d}M = 2\bar{\rho}\left|\frac{\mathrm{d}P(>\delta_c)}{\mathrm{d}M}\right|_M \mathrm{d}M$$

$$n(M) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\bar{\rho}}{M^2}\left|\frac{\mathrm{d}\ln\sigma(M)}{\mathrm{d}\ln M}\right|\frac{\delta_c}{\sigma(M)}e^{-\frac{\delta_c^2}{2\sigma(M)^2}}$$

- Uz još par sitnica:

$$\sigma(M) \propto M^{-\alpha} \Leftrightarrow P(k) \propto k^n \qquad \alpha = \frac{n+3}{6}$$

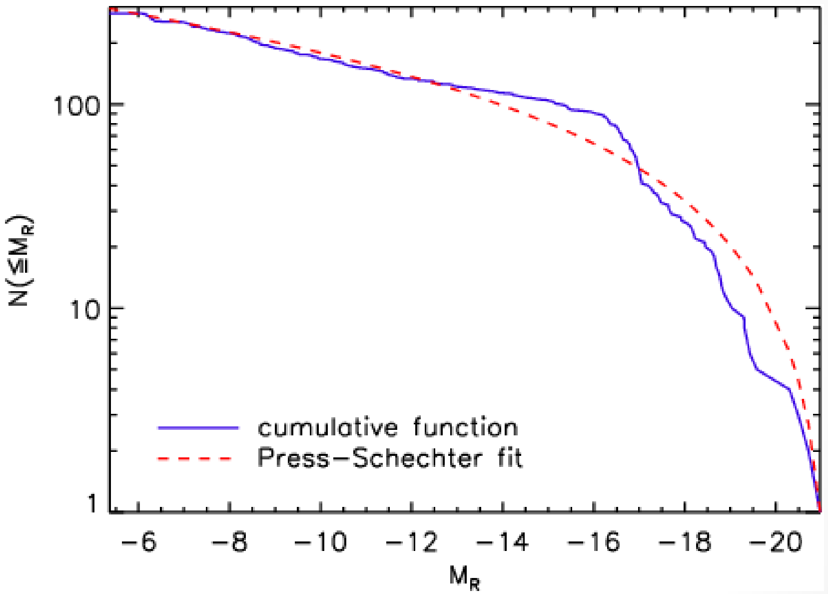
- Konačno dobijamo najpoznatiji rezultat PS formalizma:

$$\boxed{n(M) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{\bar{\rho}}{M_*^2} \left(\frac{M}{M_*}\right)^{\alpha-2} e^{-\left(\frac{M}{M_*}\right)^{2\alpha}}}$$

Uporediti sa funkcijom sjaja galaksija...

- Nakon pokušaja raznih ljudi (Zwicky, Abell, itd.), Schechter (1976) daje analitičku f-ju sjaja:

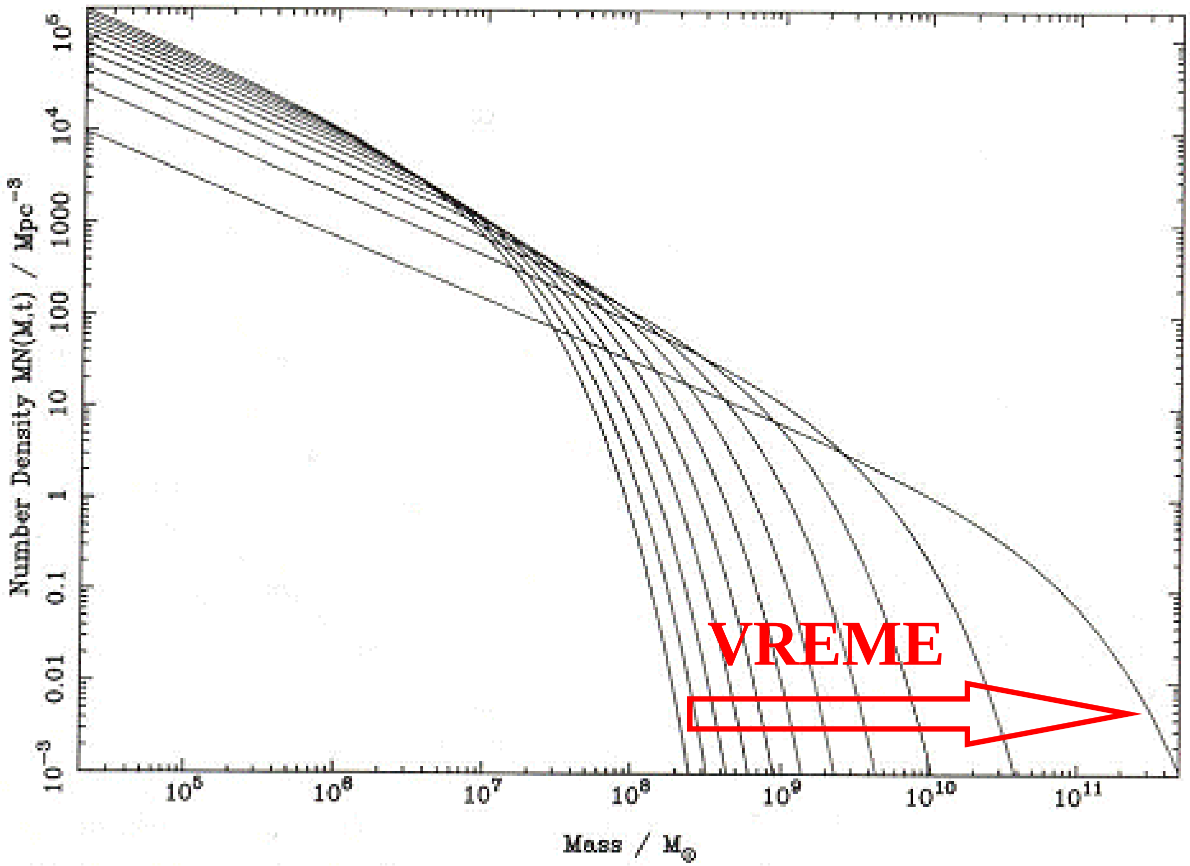
$$f(L) = \frac{f_*}{L_*}\left(\frac{L}{L_*}\right)^{\alpha} e^{-\frac{L}{L_*}}$$



- f* je normalizacija koja zavisi od uzorka, a α postavlja nagib raspodele za male luminoznosti.
- Npr.

$$f_* = (1.6 \pm 0.3) \times 10^{-2} h^3 \mathrm{Mpc}^{-3} \qquad \alpha = -1.07 \pm 0.07$$

Press-Schechterova funkcija se menja!



prema Longair (2007)

Schechterova funkcija sjaja, kao najbolja analitička aproksimacija stvarne funkcije sjaja galaksija, bila je originalno inspirisana PS funkcijom mase!

Međutim, originalna PS formulacija sadrži puno pretpostavki koje su kasnije dovođene u sumnju.

Savremeni *mainstream* proučavanja funkcije mase je izvođenje PS funkcije modeliranjem stapanja sub-galaktičkih haloa (tzv. prošireni PS formalizam: e.g., Lacey & Cole 1993).

Pošto ovakav okvir daje bolji fit na simulacije N-tela, teorijski pokušaji da se bolje razume fizika formiranja haloa su i dalje u toku...

That’s all, folks!